В. П. МАСЛОВ

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

В. П. МАСЛОВ

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги положен спецкурс, читанный автором в течении нескольких лет на физическом факультете МГУ по исследованиям автора в области теории возмущений, квазиклассической и коротковолновой асимптотике, а также теории ударных волн. В курс лекций входила целиком первая часть книги и некоторые главы второй части.

Книга рассчитана на студентов старших курсов кафедры математики физического факультета МГУ, а также студентов и аспирантов механико-математического факультета. Одновременно она доступна студентам, специализирующимся по теоретической физике x/ .

По замыслу автора книга должна в известной степени заполнить то недостающее звено, которое связывает классические уравнения математической физики и уравнения квантовой механики. Поэтому уравнения квантовой механики и оптики рассматриваются в книге как частные случаи общих уравнений с операторными коэффициентами в функциональных пространствах. Такое обобщение оказывается полезным и в конкретных физических приложениях, поскольку оно устанавливает соответствие между асимптотическими формулами,относящимися к различным областям физики.

---

x/ При условии, что физики будут обращаться для справки к /65/ и /38/.

Новые, достаточно простые формулы, полученные в работе, могут быть непосредственно использованы в теории дифракции и рефракции в электронной оптике /24/ (в особенности потому, что соответствующие задачи классической механики хорошо разработаны (75)),а также в акустике (см. /9/, /I4/), теории ударных волн /82/, /83/ и квантовой теории молекул x/ .

Заметим, что хотя все полученные в книге оценки являются асимптотическими, но как показывает расчет на машине конкретных задач, уже при "малом" параметре равном I/3 два члена асимптотики дают прекрасное приближение (см. напр. /I5/, стр. 300 ).

Все результаты (за исключением результатов § 6, гл.2, ч. I; п. $3^0$, § 2, гл. 3, ч. I и § 4, § 5, гл. 5, ч. 2), полученные в книге принадлежат автору. Большая часть их публикуется впервые. В § I, гл. 2, ч. I, написанном С.В.Фоминым,излагаются известные теоремы теории линейных операторов. В начале гл. 4, ч. I; гл. 5, ч. I; § 2, гл. 8 приводятся известные теоремы, которые используются в дальнейшем. § 5, гл. 5, ч. 2 написан В.Дубновым.

---

x/ В книге нет обзора по этим проблемам в связи с тем, что по своим основным методам работа мало соприкасается с этими исследованиями. Обзор читатель найдет в книгах Хединга, Фридлендера, Глазера.

В первой части работы рассматривается во-первых, возмущения самосопряженных операторов с дискретным спектром, а во-вторых, теория возмущений операторных уравнений. Эта последняя теория является тем аппаратом, который используется для уточнения оценок асимптотических формул и установления сходимости в тех или иных функциональных пространствах.

Применение абстрактных теорем иллюстрируются на примерах с уравнениями в частных производных.

Во второй части работы исследуется асимптотическое поведение решений уравнений в частных производных с осциллирующими и разрывными начальными данными, а также асимптотика собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов. Постановка задач и формулировки основных теорем даны в главах I-4. Далее в главах 5-8. дается доказательство этих теорем. Из методических соображений топологические утверждения доказываются в гл. 7 в формулировке достаточной для приложений, но более ослабленной чем та, которая дана в главе 2.

В приложении приводятся в качестве иллюстрации примеры асимптотических формул экпоненциального типа. Эти результаты, однако, в данной работе не доказываются. Мы остановимся на них подробнее в следующем выпуске.

Вопрос о втором члене асимптотики собственных значений решенный в гл. 9 для одномерного случая, в общем случае также будет исследован в следующем выпуске.

В заключении приношу глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову за ценные замечания по аксиоматике квантовой механики; А.Н.Тихонову за консультации по некорректным задачам; С.В.Фомину за редактирование 3-й главы теории возмущений. Я очень признателен Д.Аносову, В.Арнольду и С.Новикову за неоднократные обсуждения топологических вопросов и большую дружескую помощь; Ф.А.Березину, А.Виноградову и Я.Синаю, читавшим различные части книги и сделавшим ряд ценных замечаний редакционного характера. Самоотверженную помощь по подготовке книги к печати мне оказали аспиранты физического факультета И.А.Гордеева и В.Дубнов. Выражаю им сердечную благодарность.



1*-1419

# Ч А С Т Ь I

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

# ВВЕДЕНИЕ

Исходным пунктом того обширного круга вопросов, который сейчас объединяется общим названием "теория возмущений", служит следующая задача. Пусть нам известны собственные значения и собственные векторы матрицы А. Требуется найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A(\varepsilon)=A+\varepsilon B,$$

где $B$ - фиксированная матрица, а $\varepsilon$ - малое число. Решение этой задачи хорошо известно. Оно состоит в том, что собственные значения $\lambda_k(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$ записываются в виде рядов

$$\lambda_k(\varepsilon)=\lambda_k+\varepsilon C_{1k}+\varepsilon^2 C_{2k}+\dots$$

по степеням $\varepsilon$, где $\lambda_k$ - собственное значение "невозмущенной матрицы $A=A(0)$, а $C_{1k}, C_{2k}$ - не зависящие от $\varepsilon$ коэффициенты, вычисляемые по легко устанавливаемым формулам. [54]

Аналогичное представление имеет место и для собственных векторов $\psi_k(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$.

В некоторых задачах, также относящихся к теории возмущений, приходится искать представление в виде ряда по степеням $\varepsilon$ для той или иной функции от $A(\varepsilon)$, например для

$$(A+\varepsilon B)^{-1}$$

или для

$$e^{A+\varepsilon B}$$

Все эти задачи, не вызывающие больших затруднений, когда речь идет о матрицах, становятся весьма сложными, если вместо матриц рассматриваются линейные операторы, действующие в том или ином бесконечномерном банаховом пространстве.

В конечномерном случае очевидно следующее. Если $A(\varepsilon)=A+\varepsilon B$, то при $\varepsilon\to 0$ имеют место предельные

соотношения: $\lambda_k(\varepsilon) \to \lambda_k$, $\psi_k(\varepsilon) \to \psi_k$,
$(A+\varepsilon B)^{-1} \to A^{-1}$ (если $A^{-1}$ существует) $e^{A+\varepsilon B} \to e^{A}$
и т.д., т.е. собственные значения, собственные векторы, обратная матрица и т.д., отвечающие невозмущенной матрице, служат, как здесь обычно говорят, нулевыми приближениями (т.е. приближениями с точностью до членов, стремящихся к нулю при $\varepsilon \to 0$ ) соответствующих величин, относящихся к возмущенной матрице $A+\varepsilon B$.

В противоположность этому, для операторов, действующих в бесконечномерном пространстве, вопрос о нулевом приближении, т.е. о сходимости (при $\varepsilon \to 0$ ) некоторой функции возмущенного оператора к той же функции оператора невозмущенного представляет существенные трудности, а иногда соответствующий предельный переход может оказаться вообще невыполнимым. В качестве примера, иллюстрирующего ту далеко не простую ситуацию, которая здесь возникает, можно указать на известную теорему Г.Вейля, из которой, в частности, следует, что всякий ограниченный самосопряженный оператор $A$ , действующий в гильбертовом пространстве, можно представить как предел (по норме) последовательности операторов $\{A_n\}$ , также ограниченных, каждый из которых имеет чисто точечный спектр.

Если рассматривается оператор вида

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon B, \qquad (0.1)$$

где как $A$ , так и $B$ неограничены, то, в силу неограниченности возмущающего оператора $B$ , само понятие малости возмущения $\varepsilon B$ теряет определенный смысл: при произвольных $A$ и $B$ здесь нет оснований ожидать, что влияние возмущения $\varepsilon B$ бу-

дет в каком-то смысле мало, даже при сколь угодно малых $\varepsilon$. Для получения содержательных результатов здесь обычно приходится требовать, чтобы возмущающий оператор $B$ был в некотором смысле "подчинен" невозмущенному оператору $A$. В этом направлении ряд важных результатов получен Реллихом, Б.Ф. Ск.-Надем, Вейлем, М.Г.Крейном, О.А.Ладыженской и Л.Д.Фаддеевым [65],[70],[36],[45].

Другая возможность (именно ее мы будем рассматривать ниже) состоит в том, что можно налагать некоторые условия на само поведение $A(\varepsilon)$ как функции от $\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. При этом нет необходимости считать, что зависимость $A(\varepsilon)$ от параметра $\varepsilon$ определяется именно формулой (0.I); она может иметь и какой-либо иной характер.

Методы теории возмущений широко применяются в различных физических задачах, в частности, в квантовой механике. Эти последние применения основаны на том, что гамильтониан некоторой квантово-механической системы часто можно рассматривать как сумму вида

$$H = H_1 + \varepsilon H_2 ,$$

где $\varepsilon H_2$ - представляет собой малую "поправку" к невозмущенному гамильтониану $H_1$, собственные функции и собственные значения которого считаются известными.(Такая ситуация возникает, например, в том случае, когда рассматривается система частиц, слабо взаимодействующих друг с другом. Тогда $H_1$ - это гамильтониан системы невзаимодействующих частиц, а $\varepsilon H_2$ - их взаимодействие).

Если рассматривается оператор вида $A+\varepsilon B$, где $B$ ограничен, то известно, что перечисленные задачи теории возмущений имеют решение при достаточно малом $\varepsilon$. Решение поставленных задач дается в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon$.

Приведем здесь соответствующие формулы (так называемые формулы теории возмущений):

$$[A+\varepsilon B]^{-1}=A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k(BA^{-1})^k \qquad (0.3)$$

$$e^{i(A+\varepsilon B)}=e^{iA}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k(iB)^k \qquad (0.4)$$

Пусть $A$ и $B$-самосопряженные операторы, $\lambda_0$ - изолированная $m$-кратная точка спектра оператора $A$, а $d$ - расстояние от $\lambda_0$ до остального спектра $A$

Проекционный оператор $E^A_{\lambda_0-\frac{d}{2},\lambda_0+\frac{d}{2}}$ на подпространство собственных функций оператора $A$, отвечающих точке $\lambda_0$, выражается формулой

$$E^A_{\lambda_0-\frac{d}{2},\lambda_0+\frac{d}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\oint(A-z)^{-1}dz, \qquad (0.5)$$

где контур-кривая в комплексной плоскости $z$, проходящая на действительной прямой через точки $\lambda_0-\frac{d}{2}$ и $\lambda_0+\frac{d}{2}$ x/

x/ Интеграл определяется как предел суммы типа Коши-Римана (в смысле сходимости по норме оператора(см.гл.2,§I).

В случае, когда $A$ – оператор в $L_2$ функций от $x$ с простым дискретным спектром $(A-z)^{-1}g=\int\sum\frac{\psi_n(x)\psi_n(\xi)}{\lambda_n-z}g(\xi)d\xi$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(A-z)^{-1}g\,dz=\int\psi_n(x)\psi_n(\xi)g(\xi)d\xi=E^A_{\lambda_n-\delta,\lambda_n+\delta}\,g$$

При этом, очевидно,

$$\lambda_0 = \frac{(g, A E^A_{\lambda_0-\frac{d}{2}, \lambda_0+\frac{d}{2}} g)}{(g, E_{\lambda_0-\frac{d}{2}, \lambda_0+\frac{d}{2}} g)} = \frac{\oint (g, A(A-z)^{-1} g) dz}{\oint (g, (A-z)^{-1} g) dz}$$

для любого $g \in H$ , проекция которого на рассматриваемое подпространство собственных функций отлична от нуля.

При достаточно малом $\varepsilon$ размерность проекционного оператора

$$E^{A+\varepsilon B}_{\lambda_0-\frac{d}{2}, \lambda_0+\frac{d}{2}}$$

равна $m$ , и

$$E^{A+\varepsilon B}_{\lambda_0-\frac{d}{2}, \lambda_0+\frac{d}{2}} = \frac{1}{2\pi i} \oint (A-z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [B(A-z)^{-1}]^k dz, \tag{06}$$

где контур берется по окружности с центром в точке $\lambda_0$ и радиусом $d/2$ .

Следовательно, собственные функции и собственные значения оператора $A+\varepsilon B$ в $d/2$ - окрестности точки $\lambda_0$ совпадают с собственными функциями и собственными значениями оператора

$$(A+\varepsilon B) \frac{1}{2\pi i} \oint (A-z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [B(A-z)^{-1}]^k dz, \tag{07}$$

который можно рассматривать на подпространстве размерности $m$
Эта последняя задача сводится к отысканию собственных функ-

ций и собственных значений симметрической матрицы $m$-го порядка. Полученные таким образом ряды для собственных функций и собственных значений оператора $A+\varepsilon B$ называются рядами теории возмущений. В учебниках квантовой механики /47,87/ приводятся обычно лишь первые два члена этих рядов.

Мы будем рассматривать в первых двух главах лишь случай, когда спектр оператора $A$ дискретный, или по крайней мере имеется одна изолированная точка $\lambda$ спектра оператора $A$.

Задача о возмущении унитарных операторов и одноапраметрических полугрупп операторов рассматривается в главе 4. Там же изучается более общая задача - поведение при $n\to\infty$ решения уравнения

$$i\frac{du}{dt}-A_n(t)u=\mathcal{F}(t)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(0)=u_0\in H,$$

где $A_n(t)$ - некоторый оператор в банаховом пространстве $B$, непрерывно зависящий от параметра $t$ и сходящийся в некотором смысле при $n\to\infty$, $\mathcal{F}(t)$ - заданная функция $t$ со значениями в $B$.

В главах 3 и 5 изучается и более общая задача. Она ставится следующим образом.

Пусть семейство $\{T_\varepsilon\}$ операторов (или последовательность операторов $\{T_n\}$ ) в банаховом пространстве $B$, зависящее от параметра $\varepsilon$, сходится в том или ином смысле к предельному оператору $T$. Прямая задача теории возмущений заключается в построении аппроксимации оператора $T_\varepsilon^{-1}$ (или $T_n^{-1}$ ) с помощью известных операторов $T$ и $T^{-1}$.

Так же изучается и обратная задача теории возмущений - выяснение существования обратного оператора $T^{-1}$ и аппроксимация его с помощью семейства $T_\varepsilon^{-1}$.

В решении некоторых задач теории возмущений мы будем применять методы регуляризации.

Для указанных выше конкретных задач теории возмущений выведены определенные алгоритмы регуляризации.и приведены соответствующие оценки. Эти алгоритмы являются оптимальными в определенном (асимптотическом) смысле. В некоторых случаях эти алгоритмы могут быть, возможно, применены и для решения некорректных задач теории линейных интегральных уравнений.

Приводимый здесь метод регуляризации основан на физических представлениях о свойствах измерительного прибора (коротко об этом см. /51, 9) /). И, хотя он применяется и для абстрактных операторов, необходимость введения именно такого метода регуляризации покоится на квантовомеханическом представлении о том, что нельзя одновременно определить координату и импульс частицы, т.е. на принципе неопределенности Гайзенберга.

Заметим, что общая постановка проблемы регуляризации некорректных задач в метрических пространствах и некоторые конкретные методы регуляризации были даны А.Н.Тихоновым. [77], [78]

## ГЛАВА I. ПРОБЛЕМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ.

### § I. Постановка задачи регуляризации теории возмущений.

$1^{\circ}$. Пример регуляризации возмущающего потенциала для уравнения Шредингера.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2\psi^0}{dx^2}+u(x)\psi^0=\lambda^0\psi^0$$

Пусть $\lambda_0$ - изолированная точка спектра. Возмущенное уравнение имеет вид

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+(u(x)+\varepsilon v(x,\varepsilon))\cdot\psi=\lambda\psi ,$$

где $v(x,\varepsilon)$ ограничена для каждого $x$ при $\varepsilon\to 0$ .

В физике часто пользуются формальным разложением решения в ряд теории возмущений даже в том случае, когда возмущающий потенциал $v(x,\varepsilon)$ быстро стремится к бесконечности при $|x|\to\infty$. В этом случае спектр возмущенного уравнения может стать как дискретным, так и непрерывным. Часто оказывается, что несколько первых членов дают хорошее приближение к нужным величинам, а дальнейшие приближения только ухудшают результат. Кроме того часто, сами интегралы, выражающие члены ряда теории возмущений, расходятся, и возникает проблема устранения расходимости, регуляризации полученных интегралов, которая обычно проводится на основе некоторых физических соображений. Шифф в своем учебнике по квантовой механике допускает, что ряды теории возмущений сходятся, "хотя фактически вопрос об их аналитичности исследовался лишь для нескольких простей-

ших задач". На самом деле ряды в общем случае $A(\varepsilon)=A+B_\varepsilon$ где $B_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ сходиться не будут.

Приведем пример на уравнение Шредингера, когда интеграл $(\psi_n^0, B_\varepsilon, \psi_n^0)$ расходится, однако, как будет видно из дальнейшего, этот интеграл можно регуляризовать так, что полученное выражение будет служить первой поправкой к $\lambda^0$

Рассмотрим уравнение

$$-\psi_n'' + x^2 e^{\varepsilon x^4}\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx = 1$$

Здесь $x^2(e^{\varepsilon x^4}-1)$ – возмущение, $x^2$ – невозмущенный потенциал.

При $\varepsilon=0$ – имеем $\lambda_n^0=2n+1$ /см. [15] /, а собственные функции $\psi_n^0$ – стремятся к нулю медленнее, чем $e^{-\alpha x^2}$ при некотором $\alpha>0$, поэтому интеграл, дающий первую поправку к $\lambda_n^0$, расходится:

$$\lambda_n^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{\varepsilon x^4})\, x^2 |\psi_n^0|^2 dx = \infty$$

На самом деле, как мы увидим ниже, первой поправкой служит интеграл:

$$\lambda_n^{(1)} = \int_{-\sqrt[3]{\frac{2}{3\varepsilon}}}^{\sqrt[3]{\frac{2}{3\varepsilon}}} (1-e^{\varepsilon x^4})\, x^2 |\psi_n^0|^2 dx ,$$

и он является величиной порядка $O(\varepsilon)$.



1419

Таким образом, $\lambda_n = \lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + O(\varepsilon^2)$.

Регуляризация подобных задач будет доказана в гл.2. Оказывается, что для задач такого типа оператор $B_\varepsilon$ можно заменить ограниченным оператором $\widetilde{B}_\varepsilon$ и "близким" при малых $\varepsilon$ к $B_\varepsilon$, так, что $\lambda_n^{(1)} = (\psi_n^0, \widetilde{B}_\varepsilon \psi_n^0)$ служит первой поправкой к $\lambda_n^0$. Такая замена производится и для всех остальных членов теории возмущений.

2°. <u>Зависимость способа регуляризации от выбора представления.</u> Метод регуляризации, который естественно применять в данной задаче теории возмущений зависит от того, в каком представлении рассматривается данная задача. Как уже указывалось выше из физических соображений нужно найти невозмущенный оператор.

Рассмотрим, например, уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + v(x,a)\psi_n = \lambda_n \psi_n \qquad (1.1)$$

где

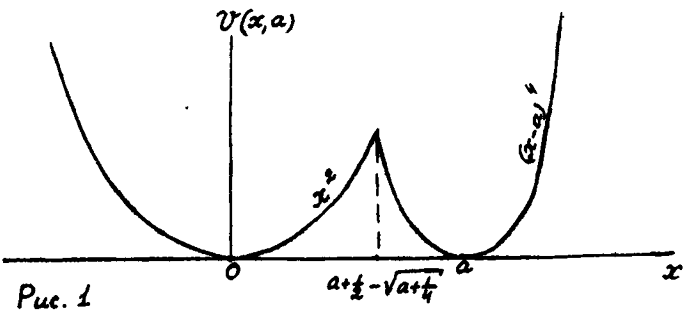



Рис. 1

$$V(x,a)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x < a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}} \\ (x-a)^4 & \text{при } x \geqslant a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}} \end{cases} \qquad (1.2)$$

(см. рис. I)

Пусть $\varphi(x)$ - финитная функция. Очевидно, что $V(x,a)\varphi(x)$ при достаточно больших $a$ равно $x^2\varphi(x)$. Следовательно, оператор умножения на $V(x,a)$ при $a\to\infty$ сходится к оператору умножения на $x^2$.

Предположим, что нас интересует следующая задача. Первоначально мы рассматривали систему в потенциальном поле $x^2$ и имели набор собственных значений ("уровней") $\lambda_n^0$ и собственных функций $\psi_n^0$.

$$-\psi_n^{0\,\prime\prime}+x^2\psi_n^0=\lambda_n^0\psi_n^0$$

Нас интересует, как повлияло возмущение потенциалом $V(x,a)-x^2$ на уровни $\lambda_n^0$ и собственные функции $\psi_n^0$. Можно легко показать, что при достаточно большом $a$ это возмущение мало скажется на $\lambda_n^0$ и $\psi_n^0$ (при фиксированном $n$ и $a\to\infty$). (См. гл. 2). Этому факту можно придать такой физический смысл. Физик $A$ изучает частицу в потенциальном поле $x^2$ и исследует влияние на эту частицу некоторого далекого возмущения. При этом все наши математические рассуждения имеют совершенно конкретное физическое содержание.

Допустим теперь, что "соседнюю" потенциальную яму - $(x-a)^4$ изучает физик $B$. Его интересует, как изменились уровни $\tilde{\lambda}_n^0$ и собственные функции $\tilde{\psi}_n^0$ уравнения

$$-\tilde{\psi}_n^{o\,\prime\prime}+(x-a)^4\tilde{\psi}_n^o=\tilde{\lambda}_n^o\tilde{\psi}_n^o$$

под влиянием возмущения потенциальным полем физика $A$, т.е. $x^2$. Все наши рассуждения относительно того, что $v(x,a)$ при $a\to\infty$ сходится к $x^2$ для физика $B$ теряют смысл. Для того, чтобы решить задачу, нужную физику $B$, мы должны перенести начало координат в точку $a$. Тогда обозначим

$$\tilde{v}(y,a)=v(x,a)=\begin{cases} y^4 & \text{при } y\geq \frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}} \\ (y+a)^2 & \text{при } y<\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}} \end{cases}$$

При $a\to\infty$ потенциал $\tilde{v}(y,a)$ будет сходиться к $y^4$. Теперь постановка задачи удовлетворяет физика $B$.

Мы совершили перенос системы координат, т.е. сдвиг на $a$. Иначе говоря, совершили унитарное преобразование сдвига: подействовали оператором $e^{-a\frac{d}{dx}}$. Таким образом, мы перешли к другому представлению того же оператора Шредингера. Уравнение

$$-\psi''+\tilde{v}(y,a)\psi=\lambda\psi$$

есть уравнение (I.I) в новом представлении. С точки зрения квантовой механики оба представления совершенно эквивалентны. Однако, в пределе при $a\to\infty$ соответствующие операторы Шредингера сходятся к разным операторам.

3°. <u>Ангармонический осциллятор.</u> Рассмотрим теперь случай ангармонического осциллятора

$$-\psi''+\{x^2+\varepsilon x^{2k+1}\}\psi=\lambda\psi \qquad (I.3)$$

$$\text{Оператор } -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \varepsilon x^{2k+1} \qquad \text{при } k \geq 1$$

не является существенно самосопряженным x/ , поэтому, казалось бы, уравнение (I.3) не имеет смысла. Если $k \geq 2$ , то при любом $\lambda < 0$ одно из решений уравнения (I.3) будет принадлежать $L_2$ , а это не имеет физического смысла.

Тем ни менее физики считают первые члены ряда теории возмущений и получают хорошее согласование с некоторыми экспериментами, причем подчас начиная с некоторого члена ряда согласие с экспериментом ухудшается. И возможно, что в каких-то других экспериментах такую теорию возмущений, вообще, применять бессмысленно.

Математическая теория возмущений должна дать ответ на вопрос о том, какие именно величины остаются инвариантными при малом возмущении и указать с какой точностью можно получить эти величины с помощью формул теории возмущений.

Однако, как мы видели, от физика требуется следующая информация. Он должен сообщить, что данное возмущение мало сказывается на его эксперименте. Задача теории возмущений заключается в том, чтобы вычислить эти незначительные изменения и дать соответствующие оценки.

---

x/ Оператор Шредингера на множестве $D'$ достаточно гладких финитных функций определяет симметрический оператор $H$ . Говорят, что оператор Шредингера существенно самосопряжен, если замыкание $H$ является самосопряженным [15]

4°. Устойчивость изолированной системы.

Когда рассматривается потенциал $u(x)$ , стремящийся к $\infty$ при $|x|\to\infty$ , то это само по себе является идеализацией. На самом деле, если потенциал достаточно велик при больших $x$ , а взаимодействие с окружающими системами мало, то потенциал можно "экстраполировать" так, чтобы $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=\infty$ Тем самым допускается, что рассматриваемая система изолирована. Возможность такого допущения связана с тем, что наша система локализована в пространстве, т.е. прибор, с помощью которого мы наблюдаем систему, позволяет нам видеть ограниченную часть пространства (область видимости), однако настолько большую, что частица практически не может уйти из этой области. Это означает, что уже вблизи границы этой области вероятность пребывания частицы становится практически равной нулю, т.е. степень точности нашего прибора не позволяет ее обнаружить.

Предположим теперь, что возмущение, которое мы совершаем, отлично от нуля вне области видимости прибора, т.е. по существу производится над системами, взаимодействием с которыми мы пренебрегли уже при написании невозмущенного уравнения. Очевидно, что прибор не обнаружит следов этого возмущения.

Заметим, что в природе на самом деле изолированных систем нет, поэтому нет и строго дискретного спектра. Однако, если взаимодействие с окружающими системами очень мало, то полоску спектра экспериментатор не может отличить от одного

уровня и поэтому можем рассматривать идеализированную задачу - изолированную систему с дискретным спектром. Поэтому, написав уравнение Шредингера для изолированной системы, нужно проверить эту систему на устойчивость относительно далеких возмущений и указать, какие величины при этом остаются устойчивыми. Именно такие величины и наблюдают физики. Чтобы понять, какие величины остаются устойчивыми при далеком изменении потенциала, обратимся к примерам. Для этих примеров мы сформулируем лишь окончательные результаты, доказательство которых, впрочем, совершенно элементарно.

а) Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\psi_n''(x) + v(x,a)\,\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \qquad (I.4)$$

где $v(x,a)$ - потенциал вида (I.2) (рис. I)

Предположим, что нас интересует следующая задача. Первоначально мы рассматривали систему в поле с потенциалом $x^2$ и имели набор уровней $\lambda_n^0 = 2n+1$ и собственных функций

$$\psi_n^0 = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} H_n(x).$$

где $H_n(x)$ - полиномы Эрмита.

Нас интересует, как повлияло возмущение потенциалом $v(x,a) - x^2$ на уровни $\lambda_n^0$ и собственные функции $\psi_n^0$. Как уже указывалось, при достаточно большом $a$ это

возмущение мало скажется на $\lambda_n^0$ и $\psi_n^0$ (при фиксированном $n$ и $a\to\infty$). В этом случае оказывается, что $\lambda_n^0$ и $\psi_n^0$ изменятся на величину $\sigma_a = O\left[\psi_n^0[x_0(a)]\right]$, где $x_0(a) = a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}}$

При $a\to\infty$ эта величина стремится к нулю, как $e^{-\alpha a^2}$, где $\alpha$ - некоторая константа. Предположим, что величиной $\sigma_a$ мы можем пренебречь, т.е. точность нашего прибора не позволяет обнаружить величину такого порядка малости. В таком случае, мы можем без ущерба для результата "экстраполировать" потенциал $x^2$ за точку $x_0(a)$. Иначе говоря, рассматривать вместо $V(x,a)$ потенциал $x^2$.

В этом примере собственные значения уравнения (I.4) могут быть отнесены к 2-м различным классам.

I класс собственных значений, близких к собственным значениям $\lambda_n^0 = 2n+1$ уравнения осциллятора,
и 2-ой класс собственных значений, близких к собственным значениям уравнения

$$-\tilde{\psi}_n^{0\,\prime\prime} + (x-a)^4\tilde{\psi}_n^0 = \tilde{\lambda}_n^0\tilde{\psi}_n^0$$

Соответственно, собственные функции делятся на два класса:

I) - класс собственных функций, близких к $\psi_n^0$; и

2) - класс собственных функций, близких к $\tilde{\psi}_n^0$.

Это означает, что две системы с потенциалами $x^2$ и $(x-a)^4$ при достаточно большом $a$ пренебрежимо мало взаимодействуют и мы можем отдельно рассматривать каждую из них.

б) Рассмотрим теперь уравнение (I.4), где $\mathcal{V}(x,a)$ имеет вид

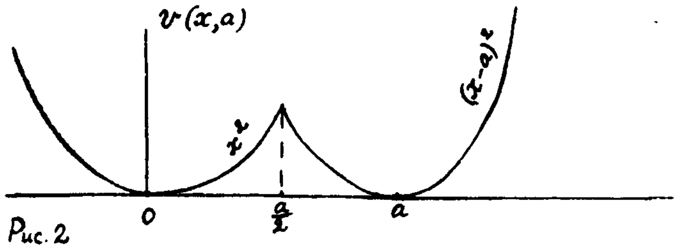



Рис. 2

$$\mathcal{V}(x,a) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x < \frac{a}{2} \\ (x-a)^2 & \text{при} \quad x \geqslant \frac{a}{2} \end{cases}$$

Оператор умножения на $\mathcal{V}(x,a)$ при $a \to \infty$ будет опять сходиться к $x^2$. Однако, в отличие от предыдущего случая у возмущенного уравнения (I.4) будут существовать 2 собственных значения, близких к $\lambda_n^0$ : $\lambda_n$ и $\bar{\lambda}_n$. Они будут отличаться от $\lambda_n^0$ на величину

$$\sigma_a = O\left[\psi_n^0\left(\frac{a}{2}\right)\right].$$

Собственные функции $\psi_n$ и $\bar{\psi}_n$, соответствующие $\lambda_n$ и $\bar{\lambda}_n$, будут отличаться на интервале $-\infty < x < \frac{a}{2}$ от $\psi_n^0/\sqrt{2}$. (с точностью до знака) также на величину $\sigma_a$.

Поскольку собственные значения "левой" и "правой" ямы совпадают, можно сказать, что происходит "резонанс". Поэтому уровень $\lambda_n^0$ "расщепляется" на $\lambda_n$ и $\bar{\lambda}_n$, причем собственные функции $\psi_n$ и $\bar{\psi}_n$ будут по модулю близки к

$$\psi_n^{\circ}(x-a)/\sqrt{2}$$

при $\frac{a}{2} \leq x < \infty$

Таким образом, поскольку в области $\frac{a}{2} \leq x < \infty$ $\psi_n^{\circ} = O(e^{-\alpha a^2})$, то в данном случае речь может идти о близости собственных функций возмущенного уравнения (I.4) к собственным функциям невозмущенного уравнения при $a \to \infty$ лишь в области $-\infty \leq x \leq a/2$. Однако, заметим, что общая суммарная вероятность пребывания частицы на уровнях $\lambda_n$ и $\bar{\lambda}_n$ при $a \to \infty$ отличается от I на величину $\sigma_a$. Если точность прибора не позволяет обнаруживать величины $\sigma_a$, то мы не сможем отличить уровни $\lambda_n$ и $\bar{\lambda}_n$ друг от друга. Мы будем видеть лишь один "слившийся" уровень.

Плотность вероятности пребывания частицы на этом "уровне" будет с точностью до $\sigma_a$ равна

$$\frac{|\psi_n^{\circ}(x)|^2}{2} + \frac{|\psi_n^{\circ}(x)|^2}{2} = |\psi_n^{\circ}(x)|^2$$

Поэтому и во втором примере мы можем без ущерба для физического результата экстраполировать потенциал $x^2$ за точку $\frac{a}{2}$ т.е. ограничиться изучением потенциала $x^2$.

в) Рассмотрим теперь потенциал $V(x,a)$ вида

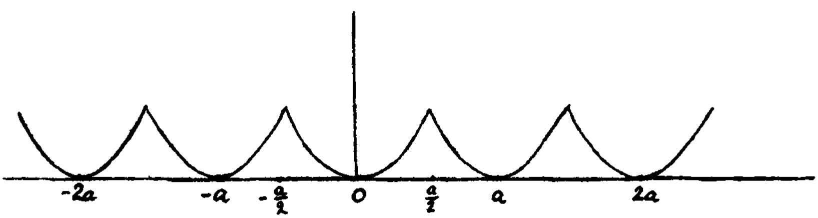



Рис 3

$$V(x,a) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ (x-ka)^2 & \text{при } ka-\frac{a}{2} \leq x < \frac{a}{2}+ka \\ (x-ma)^2 & \text{при } x > ma-\frac{a}{2} \\ (x+ma)^2 & \text{при } x < -ma+\frac{a}{2} \end{cases}$$

В этом случае картина будет такая же, как в предыдущем примере (случай "резонанса"), только уровней, близких (т.е. отличающихся на величину $\sigma_a = O[\psi_n^0(\frac{a}{2})]$) к $\lambda_n^0$ будет $2m$: $\lambda_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\bar{\lambda}}_n, \dots$

Если степень точности прибора не превосходит $\sigma_a$, то мы видим лишь один "слившийся" уровень $\lambda_n^0$. Суммарная вероятность пребывания частицы в области $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ и

$\lambda_n - \sigma_a \leq \lambda \leq \lambda_n + \sigma_a$

отличается от единицы на величину $\sigma_a$.

Собственные функции уравнения (I.4) в области $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ по модулю мало отличаются от $\psi_n^0$.

Следовательно, если величиной $\sigma_a$ мы можем пренебречь, то физическая картина не изменится при замене потенциала $V(x,a)$ на $x^2$.

Пусть теперь число $m$ в предыдущем примере равно $\infty$. В этом случае спектр будет непрерывным: квадрат собственных функций (обобщенных) уже не будет интегрируем. Тем не менее в области $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ собственные функции $\psi_n$ (непрерывного спектра) будут совпадать с $\psi_n^0$ с точностью до $\sigma_a = O[\psi_n^0(\frac{a}{2})]$, а спектр будет занимать полоску около $\lambda_n^0$ ширины не большей $\sigma_a$. Поэтому, если степень точности прибора меньше $\sigma_a$, то мы не отличим полоску

от одного уровня, поэтому потенциал $V(x,a)$ можно заменить на $x^2$.

г) Рассмотрим, наконец, потенциал следующего вида

$$V(x,a) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{при} \quad x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

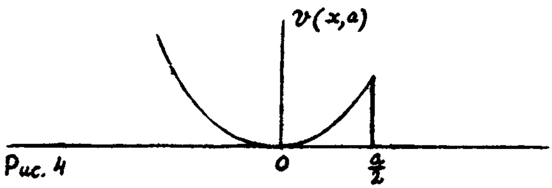


Рис. 4

В этом случае спектр будет непрерывным, причем будет заполнять всю полуось $\lambda > 0$.

Однако, собственные функции, соответствующие точкам $\lambda$, лежащим вне $\sigma_a = O[\psi_n^0(\frac{a}{2})]$ окрестности точек $\lambda_n^0$, в области $x < \frac{a}{2}$ будут стремиться к нулю и иметь порядок малости $\sigma_a$.

Собственные же функции, соответствующие точке $\lambda = \lambda_n^0$ и некоторой окрестности этой точки, в области $x < \frac{a}{2}$ будут отличаться от $C_n \psi_n^0(x)$ на величину $\sigma_a$.

Поэтому, если точность нашего прибора не позволяет наблюдать величины $\sigma_a$, то ширина полоски точек спектра в окрестности $\lambda_n^0$, для которых вероятность пребывания частицы внутри ямы заметно отлична от нуля, не будет нами обнаружена и мы увидим один "слившийся" уровень $\lambda_n^0$. При этих услови-

ях потенциал $v(x,a)$ можно заменить потенциалом $x^2$.

Из этих примеров ясно, в каком смысле нужно понимать устойчивость изолированной системы относительно далеких возмущений. Если дан невозмущенный потенциал $u(x)$ и возмущение $v(x,a)$, равное нулю в интервале, стремящемся ко всей прямой при $a \to \infty$, то мы можем надеяться, что собственные функции системы с потенциалом $u(x)$ будут устойчивы относительно такого "далекого" возмущения лишь в конечной области переменной $x$ (мы ее назовем областью видимости), которая зависит от $a$ и в пределе при $a \to \infty$ совпадает со всей прямой. При этом могут появиться новые точки спектра, никак не связанные с невозмущенным уравнением. Однако, вероятность пребывания частицы на таких уровнях в области видимости оказывалась в наших примерах пренебрежимо малой.

## § 2. Теория возмущений одномерного уравнения Шредингера.

### I°. Основные понятия.

Предположим, что в операторе

$$\hat{L}^o = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

потенциал $u(x)$ удовлетворяет условиям $u(\pm\infty) = +\infty$. Возмущающий потенциал $\varepsilon v(x,\varepsilon)$ пусть стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ для каждого фиксированного $x$.

(В примере $a)$ п. 4° § 1 $\varepsilon v(x,\varepsilon) = -x^2 + (x - \frac{1}{\varepsilon})^4$ при $x > x_0(\frac{1}{\varepsilon})$ и равен нулю при $x \leq x_0(\frac{1}{\varepsilon})$ в примере $\delta)$ $\varepsilon v(x,\varepsilon) = -x^2 + (x - \frac{1}{\varepsilon})^2$ при $x > \frac{1}{2\varepsilon}$ и равен нулю при $x \leq \frac{1}{2\varepsilon}$ ).

Возмущенный оператор имеет вид:

$$\hat{L}\psi = -\psi'' + [u(x) + \varepsilon v(x,\varepsilon)]\psi$$

Мы видели на примерах а) - г) п. 4° § 1, что область видимости зависит от параметра $\varepsilon$ и стремится к $(-\infty, +\infty)$ при $\varepsilon \to 0$.

Введем теперь общее определение области видимости. Пусть $x_\varepsilon$ таково, что из $|x| \leq x_\varepsilon$ вытекает $\varepsilon|v(x,\varepsilon)| \leq \alpha$, причем $\varepsilon|v(x_\varepsilon,\varepsilon)| = \alpha$, где $\alpha$ - некоторая константа, не зависящая от $\varepsilon$.

Мы назовем область $|x| \geq x_\varepsilon$ областью невидимости. Константу $\alpha$ мы уточним ниже. Она зависит лишь от невозмущенного оператора.

Областью видимости назовем область $|x| \leq \frac{x_\varepsilon}{2}$, а $r_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{2}$ - радиусом видимости.

Область $\frac{x_\varepsilon}{2} \leq |x| \leq x_\varepsilon$ - промежуточная между областью видимости и областью невидимости. В соответствии со сказанным выше, будем считать, что при $\frac{x_\varepsilon}{2} \leq |x| \leq x_\varepsilon$ нельзя обнаружить частицу в невозмущенном потенциальном поле с помощью нашего прибора. Это значит, что величинами порядка

$$\int_{x_\varepsilon/2}^{x_\varepsilon} |\psi_n^0(x)|^2 dx$$

мы будем пренебрегать.

Как известно / 33 /, если потенциал $u(x)$ растет

как $x^{2k}$, то при $|x| \to \infty$ будут иметь место оценки:

$$|\psi_n^\circ(x)| \leq C_n e^{-\frac{|x|^{k+1}}{k+1}}, \qquad n = 1, \ldots$$

где $C_n$ - некоторые константы.

Отсюда, поскольку

$$x^{k+1}/k+1 > (1-\delta) \int \sqrt{|\lambda_n^\circ - u(x)|}\, dx$$

при $x \to \infty$, следует

$$\int_{x_\varepsilon/2}^{x_\varepsilon} |\psi_n^\circ(x)|^2 dx \leq \int_{x_\varepsilon/2}^{\infty} |\psi_n^\circ(x)|^2 dx \leq C_n e^{-\frac{2}{k+1}\left|\frac{x_\varepsilon}{2}\right|^{k+1}} \leq$$

$$\leq C_1 e^{-2(1-\delta)\int_0^{x_\varepsilon/2} \sqrt{|\lambda_n^\circ - u(x)|}\, dx};$$

где $C_1, \delta$ - некоторые константы, не зависящие от $\varepsilon$.

Если величиной порядка

$$\sigma(\varepsilon) = C \exp\left\{-(1-\delta)\int_0^{x_\varepsilon/2} \sqrt{|\lambda_n^\circ - u(x)|}\, dx\right\}$$

мы можем пренебрегать, то изложенные выше интуитивные соображения позволяют предполагать, что на нашу систему не оказывает влияние та часть возмущающего потенциала $\varepsilon v(x,\varepsilon)$, которая лежит в области невидимости.

Разобьем потенциал $v(x,\varepsilon)$ на сумму $\bar{v}(x,\varepsilon)$ и $\bar{\bar{v}}(x,\varepsilon)$: $v(x,\varepsilon) = \bar{v}(x,\varepsilon) + \bar{\bar{v}}(x,\varepsilon)$,

где $\bar{v}$ и $\bar{\bar{v}}$ имеют вид:

$$\bar{v}(x,\varepsilon) = \begin{cases} v(x,\varepsilon) & \text{при} \quad |x| \leq x_\varepsilon \\ 0 & \text{при} \quad |x| > x_\varepsilon \end{cases} \qquad (2.\mathrm{I})$$

$$\bar{\bar{v}}(x,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| \leq x_\varepsilon \\ v(x,\varepsilon) & \text{при} \quad |x| > x_\varepsilon \end{cases}$$

Известно, что ряд теории возмущений сходится в том случае, когда возмущение $\varepsilon v(x,\varepsilon)$ по модулю не превосходит некоторой константы $\beta > 0$, зависящей лишь от невозмущенного оператора. Эту константу мы уточним в следующей лемме.

2°. Более точное определение радиуса видимости

Лемма I.I.

Пусть $A$ и $B$ - самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $H$, $d$ - расстояние от некоторой точки $\mu$ до остального спектра оператора $A$. Пусть $\|B\| \leq \frac{d}{2+\sigma}$, где $\sigma > 0$. Тогда

I. В промежутке $\Delta = \left\{ \mu - \frac{d}{2+\sigma}, \mu + \frac{d}{2+\sigma} \right\}$ спектр оператора $A+B$ дискретен, причем размерность подпространства отвечающего проекционному оператору $E_\Delta^{A+B}$, равна нулю, если $\mu$ принадлежит резольвентному множеству оператора $A$, и равна его кратности, если $\mu$ - собственное значение оператора $A$.

2. Ряды теории возмущений (см. (0.6), (0.7) ), определяющие собственные значения промежутка $\Delta$ и собственные функции, отвечающие им, для оператора $A+\varepsilon B$ сходятся при $\varepsilon \leq 1$.

Таким образом, собственные функции и собственные значения оператора $A+\varepsilon B$ при $\varepsilon = 1$ могут быть представле-

ны в виде сходящихся рядов теории возмущений. Доказательство.

Возьмем точку $\mu+\ell$, где $0\leq\ell<d$. Очевидно, что:

$$[A+\varepsilon B+\mu+\ell]^{-1}=[A+\mu+\ell]^{-1}\left[1+\varepsilon B(A+\mu+\ell)^{-1}\right]^{-1} \tag{2.2}$$

Как известно, [65]

$$\|[A+\mu+\ell]^{-1}\|\leq Max\left\{\frac{1}{\ell},\frac{1}{d-\ell}\right\}$$

Следовательно,

$$\|\varepsilon B(A+\mu+\ell)^{-1}\|\leq Max\left\{\frac{d}{(2+\sigma)\ell},\frac{d}{(2+\sigma)(d-\ell)}\right\}$$

при $\varepsilon\leq 1$.

Для любого ограниченного оператора $T$

$$\|1+T\|\geq 1-\|T\|$$

Следовательно, если $\|T\|<1$, то x/

$$\|[1+T]^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|T\|}$$

Пусть $\ell$ таково, что

$$\frac{d}{(2+\sigma)\ell}<1 \quad \text{и} \quad \frac{d}{(2+\sigma)(d-\ell)}<1$$

Тогда оператор $T=\varepsilon B[A+\mu+\ell]^{-1}$

---

x/ Действительно, если $\|Ag\|\geq\alpha\|g\|$, то полагая $g=A^{-1}f$ получим $\frac{1}{\alpha}\|f\|\geq\|A^{-1}f\|$, значит $\|A^{-1}\|\leq\frac{1}{\alpha}$.

по норме не превосходит единицы. Следовательно,

$$[A+\varepsilon B+\mu+\ell]^{-1}=[A+\mu+\ell]^{-1}[1+T]^{-1}$$

существует и ограничен. Следовательно, точки $\mu+\ell$ при

$$\frac{d}{2+\sigma}<\ell<\frac{1+\sigma}{2+\sigma}d$$

принадлежат резольвентному множеству оператора $A+\varepsilon B$.

Аналогично тому, как это делается в аналитическом случае / 65 / можно проинтегрировать формулу (2.2) вдоль замкнутого контура, охватывающего точку $\mu$ и принадлежащего резольвентному множеству оператора $A+\varepsilon B$.

Отсюда, аналогично / 65 / можно сделать вывод, что внутри контура оператор $A+B$ имеет дискретные точки спектра, причем размерность подпространства собственных функций, соответствующих им, совпадает с кратностью точки $\mu$ .

Отсюда следует также, см. / 65 /, что ряды теории возмущений для собственных значений оператора $A$ , заключенных в круге с центром в точке $\mu$ радиуса $d/2+\sigma$ и собственных функций, соответствующих им, сходятся. Лемма доказана.

Положим константу $\alpha$ в определении области видимости равной константе $d/2+\sigma$. Тогда, поскольку в силу (2.I) $\varepsilon|\bar{v}(x,\varepsilon)|\leq\varepsilon|v(x_\varepsilon,\varepsilon|\leq\frac{d}{2+\sigma}$ , то ряд теории возмущений для собственных функций и собственных значений оператора $\hat{L}^0+\varepsilon\bar{v}(x,\varepsilon)$ будет сходиться.

3°. <u>Основное утверждение.</u>

**Имеют место следующие предложения:**

I) Оператор

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\hat{L}^{o}+\varepsilon\bar{v}(x,\varepsilon)\right]\oint_{\Gamma}\left[\hat{L}^{o}-z\right]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\varepsilon^{k}\left[\bar{v}(x,\varepsilon)(\hat{L}^{o}-z)^{-1}\right]^{k}dz,$$

где $\Gamma$ - окружность с центром в точке $\lambda^{o}$ радиуса $d/2$, имеет одно простое собственное значение $\mu(\varepsilon)$ и собственную функцию $\varphi(x,\varepsilon)$.

2) Пусть решение $\psi_{\lambda}$ уравнения

$$\left[\hat{L}^{o}+\varepsilon v(x,\varepsilon)\right]\psi_{\lambda}=\lambda\psi_{\lambda}$$

удовлетворяет неравенству

$$\int_{-x}^{x}|\psi_{\lambda}|^{2}dx\leq Ce^{\frac{\delta}{2}x}, \qquad (2.3)$$

где $\delta>0$, $C>0$ не зависят от $\varepsilon$. $\lambda^{o}$ - простое собственное значение оператора $\hat{L}^{o}$, ближайшее к $\lambda$ (или любое из двух ближайших к $\lambda$).

Тогда будут выполнены соотношения

$$\int_{-\tau_{\varepsilon}}^{\tau_{\varepsilon}}\left|\left\{1-\frac{1}{2\pi i}\oint\left[\hat{L}^{o}-z\right]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\varepsilon^{k}\left[\bar{v}(x,\varepsilon)(\hat{L}^{o}-z)^{-1}\right]^{k}dz\right\}\psi_{\lambda}\right|^{2}dx\leq\sigma^{2}(\varepsilon) \qquad (2.4)$$

$$|\lambda-\mu(\varepsilon)|^{2}\int_{-\tau_{\varepsilon}}^{\tau_{\varepsilon}}|\psi_{\lambda}|^{2}dx\leq\sigma^{2}(\varepsilon), \qquad (2.5)$$

где $\sigma^{2}(\varepsilon)=C_{1}\exp\left[-(2-\delta)\int_{0}^{x_{\varepsilon}}\sqrt{|\lambda^{o}-u(x)|}\,dx\right]$

Это утверждение является частным случаем теоремы, которая будет доказана в гл. II. Поэтому мы его не будем специально до-

казывать, а лишь поясним его физический смысл.

Во-первых, условие (2.3) на решение $\psi_\lambda(x)$ обуславливает такую нормировку $\psi_\lambda(x)$, чтобы при $\varepsilon \to \infty$ оно не стремилось бы к $\infty$. Во-вторых, оно выделяет некоторый класс решений, в который, в частности, включаются собственные функции дискретного и непрерывного спектра существенно самосопряженного оператора вида $\hat{L}^o + \varepsilon V(x,\varepsilon)$. Мы, однако, не требуем существенной самосопряженности суммы $\hat{L}^o + \varepsilon V(x,\varepsilon)$, заменяя это условием (2.3). В противном случае даже задача об ангармоническом осцилляторе не удовлетворяла бы условиям теоремы.

Соотношения (2.4) и (2.5) означают следующее.

I. Если $|\lambda - \mu(\varepsilon)| \geqslant \delta > 0$, причём $\delta$ не зависит от $\varepsilon$, то вероятность найти частицу в радиусе видимости (т.е. в области $|x| \leq r_\varepsilon$) столь мала, что не может быть обнаружена прибором.

2. Если вероятность найти частицу на уровне $\lambda$ в радиусе видимости больше $\delta$, не зависящего от $\varepsilon$ (т.е. $\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon} |\psi_\lambda|^2 dx \geqslant \delta > 0$, то со степенью точности прибора $\lambda$ равно $\mu(\varepsilon)$, причем собственная функция $\psi_\lambda$ в радиусе видимости выражается (с нашей степенью точности) рядом теории возмущений. Таким образом, если в нашей задаче пренебрегать величиной $\sigma(\varepsilon)$, то мы получим полное решение задачи методом теории возмущений.

Удобнее сформулировать этот результат, заранее отождествив все функции, разность между которыми не превосходит $\sigma(\varepsilon)$

Ведь наш прибор, по предположению, такие величины не различает. Для этого рассмотрим пространство $L_2(\varepsilon)$ функций от $x$ и $\varepsilon$ интегрируемых с квадратом по $x$ при $-\tau_\varepsilon < x < \tau_\varepsilon$ и непрерывных по $\varepsilon$ и фактор-пространство $S = L_2(S)/\sigma(\varepsilon)$, в котором отождествлены элементы, разность между которыми принадлежит области определения оператора умножения на $1/\sigma(\varepsilon)$. Равенство в этом фактор-пространстве будет обозначать значком $\underset{S}{=}$. Например, соотношение (2.5) тогда может быть записано в виде

$$|\lambda - \mu(\varepsilon)| \sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} |\psi_n|^2 dx} \underset{S}{=} 0$$

Таким образом, задача об ангармоническом осцилляторе имеет смысл лишь в фактор-пространстве $S$.

4°. <u>Случай положительного возмущения.</u>

Мы докажем во второй главе, что если $v(x,\varepsilon) > 0$, то $\psi_\lambda(x)$ стремится к нулю вне области видимости быстрее, чем

$$C \exp\left\{-(1-\delta)\int_0^x \sqrt{|\lambda - u(x)|}\, dx\right\}$$

Поэтому интегралы в левых частях неравенств (2.4), (2.5) в этом случае можно брать от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае, очевидно, одной точке $\mu(\varepsilon)$ отвечает не более одного собственного значения уравнения $[\hat{L}^\circ + \varepsilon v(x,\varepsilon)]\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$, удовлетворяющего условиям (2.5).

Действительно, в противном случае мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_2\psi_{\lambda_1} - C_1\psi_{\lambda_2}|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |C_2(\psi_{\lambda_1} - C_1\varphi(x,\varepsilon)) - C_1(\psi_{\lambda_2} - C_2\varphi(x,\varepsilon))|^2 dx$$



3-4419

$$\leq |C_2|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\lambda_1} - C_1 \varphi(x,\varepsilon)|^2 dx + |C_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\lambda_2} - C_2 \varphi(x,\varepsilon)|^2 dx \leq$$

$$\leq 2\sigma^2(\varepsilon) \left( |C_1|^2 + |C_2|^2 \right), \tag{2.6}$$

если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ два значения удовлетворяющих (2.5) при одном и том же $\mu(\varepsilon)$.

Поскольку система функций $\psi_{\lambda_k}$ ортонормирована, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C_2 \psi_{\lambda_1} - C_1 \psi_{\lambda_2}|^2 dx = |C_1|^2 + |C_2|^2 .$$

Отсюда и из (2.6)

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 \leq 2\sigma^2(\varepsilon) \left\{ |C_1|^2 + |C_2|^2 \right\},$$

что невозможно.

Неравенства (2.4), (2.5) ничего не говорят о том, существует ли в интервале $\lambda^0 - \frac{d}{2} \leq \lambda \leq \lambda^0 + \frac{d}{2}$ точка спектра возмущенного оператора $\hat{L}^0 + \varepsilon V(x,\varepsilon)$ такая, что интеграл по области видимости от квадрата собственной функции, соответствующей ей, не стремился бы к нулю при $\varepsilon \to 0$

Однако, в силу теоремы Реллиха (см. гл. $3$ §2 п. $3^\circ$ ) спектральные семейства $E_\lambda^{A+\varepsilon B}$ сильно сходятся при $\varepsilon \to 0$ к $E_\lambda^A$. Здесь $E_\lambda^{A+\varepsilon B}$ - спектральное семейство возмущенного оператора $A+\varepsilon B$, $E_\lambda^A$ - спектральное семейство невозмущенного оператора $A$. Отсюда, обозначая

$$E_\Delta = E_{\lambda^0 + \frac{d}{2}} - E_{\lambda^0 - \frac{d}{2}}; \quad \Delta = \left\{ \lambda^0 - \frac{d}{2}, \lambda^0 + \frac{d}{2} \right\}$$

будем иметь

$$E_\Delta^{A+\varepsilon B} \to E_\Delta^A .$$

(знак $\to$ означает сильную сходимость (см. гл. 2, § I) )
Очевидно, что, поскольку в интервале $\Delta$ по условию имеется точка спектра $\lambda_0$ оператора $A$, то $E_\Delta^A \psi^\circ = \psi^\circ$, где $\psi^\circ$ – нормированная собственная функция оператора $A$, отвечающая точке $\lambda^\circ$.
Значит $(\psi^\circ, E_\Delta^A \psi^\circ) = \|\psi^\circ\| = 1$.
Следовательно, в силу теоремы Реллиха

$$\left(\psi^\circ, E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^\circ\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$$

Поскольку

$$\left| \int\limits_{|x| \geq r_\varepsilon} \psi^\circ E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^\circ dx \right| \leq \sqrt{\int\limits_{|x| \geq r_\varepsilon} |\psi^\circ|^2 dx} \sqrt{\int\limits_{|x| \geq r_\varepsilon} |E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^\circ|^2 dx} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 ,$$

значит

$$\int\limits_{|x| \leq r_\varepsilon} \psi^\circ E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^\circ dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1 \qquad (2.7)$$

Отсюда следует, что собственному значению $\lambda^\circ$ отвечает хотя бы одна собственная функция $\psi_\lambda$, такая, что $\lambda \to \lambda^\circ$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\int\limits_{-\tau_\varepsilon} |\psi_\lambda(x)|^2 dx$$

не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. В противном случае было бы:

$$\int\limits_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \left|E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^\circ\right|^2 dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

что невозможно в силу (2.7)

В результате мы доказали следствие из неравенств (2.4) и (2.5).

<u>Следствие.</u> Пусть $v(x,\varepsilon) > 0$, тогда каждому собственному значению $\lambda^0$ оператора $L^0$ отвечает одно и только одно собственное значение $\lambda$ оператора $L$ такое, что имеют место соотношения:

$$|\lambda - \mu(\varepsilon)| \leqslant C \exp\left\{-(1-\delta)\int\limits_0^{\tau_\varepsilon}\sqrt{|\lambda^\circ - u(x)|}\, dx\right\}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_\lambda - C_\lambda(\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)|^2 dx \leqslant C \exp\left\{-2(1-\delta)\int\limits_0^{\tau_\varepsilon}\sqrt{|\lambda^\circ - u(x)|}\, dx\right\}$$

Аналогичное следствие будет иметь место и для многомерного аналога теоремы пункта $3^0$ (см. гл. 2). Это усиливает ре- зультаты Титчмарша для этого случая.[76] (См. также [24, 2]])

§ 3. <u>Разрешающая способность прибора.</u>

Теперь предположим, что самосопряженный оператор

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \tag{3.1}$$

в $L_2(R^1)$ возмущается оператором $i\varepsilon \frac{d^3}{dx^3} = \varepsilon B$

Если мы перейдем к $p$ - представлению, т.е. совершим преобразование Фурье, то мы получим

$$A + \varepsilon B = -\frac{d^2}{dp^2} + p^2 + \varepsilon p^3 \tag{3.2}$$

Таким образом мы приходим к уже рассмотренному выше случаю.

Радиус видимости в данном случае будет равен

$$p_\varepsilon = \frac{const}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \tag{3.3}$$

Вероятность пребывания частицы вблизи границы области видимости имеет порядок $O(e^{-\frac{const}{\varepsilon^{2/3}}})$. Следовательно, в силу сказанного в предыдущем пункте, именно с такой степенью точности мы можем выразить в виде сходящегося ряда для $\mu(\varepsilon)$ сдвиг дискретных уровней невозмущенного оператора $A$ под влиянием возмущения $\varepsilon B$.

Физическая интерпретация в данном случае заключается в том, что наш прибор имеет ограниченную область видимости в импульсном диапазоне, т.е. частицы, обладающие импульсом порядка $O(\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}})$, он не может обнаружить; ибо вероятность того, что частицы обладают таким импульсом, равна $O(e^{-c/\varepsilon^{\frac{2}{3}}})$.

Но отсюда немедленно следует, в силу принципа неопределенности Гайзенберга, что прибор не может точно определить координату частицы! Именно, если радиус видимости в диапазоне импульсов имеет порядок $r_\varepsilon$, то дисперсия по координате (или разрешающая способность прибора) имеет порядок $1/r_\varepsilon$.

Действительно, если частица находится в точке $x_0$, то

ее состояние имеет вид $\delta(x-x_0)$. Но высокие частоты (при $|p|>|p_\varepsilon|$) разложения $\delta(x-x_0)$ в интеграл Фурье не могут быть обнаружены нашим прибором. Следовательно наш прибор не может определить точно частицу в точке $x=x_0$.

Этот факт для некоторых конкретных экспериментов можно интерпретировать еще следующим образом. Когда мы говорим, что производим измерение в точке $x$, то это значит, что прибор мы "нацеливаем" на точку $x$. Однако, наш прибор, вообще говоря, не произвел измерения точно в самой точке $x$, а возможно, измерял в некоторой близкой точке. На самом деле прибор производит измерение в заданной точке $x$ лишь с некоторой вероятностью.

Плотность вероятности того, что прибор производит измерение в точке x/ $x$, как правило, симметрична и имеет максимум в точке $\xi=x$.

Задача, связанная с возмущением линейного оператора, как правило, допускает большой произвол в построении разрешающей плотности $\varphi(x-\xi,\sigma)$. Однозначно лишь определяется порядок величины разрешающей способности $\sigma$ (см. гл. 5, лемма 5.4). В приведенном примере, очевидно,

$$\varphi(x-\xi,1/\tau_\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\tau_\varepsilon,p)e^{-ipx}dp\int_{-\infty}^{\infty}e^{ip\xi}\delta(\xi-x_0)d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P(\tau_\varepsilon,p)\,e^{ip(x_0-x)}dp\,, \tag{3.4}$$

где $P(\tau_\varepsilon,p)$ – любая гладкая функция равная единице с

---

x/ Эта трактовка носит несколько условный характер. Точная физическая трактовка функции $\varphi(x-\xi,\sigma)$ аналогична трактовке собственной функции оператора координаты в пространстве Кляйна-Гордона /86/.

точностью до $\sigma(\varepsilon)$ при $|p| < \tau_\varepsilon$ и равная нулю с точностью до $\sigma(\varepsilon)$ при $|p| > 2\tau_\varepsilon$. Полученная функция $\mathcal{Y}(x-\xi, 1/\tau_\varepsilon)$ - есть "размазанная" $\delta$ - функция ширины порядка $1/\tau_\varepsilon$ ".

Предположим, что прибор измеряет некоторую величину $f(x)$. Это значит, что мы задаем точку $x$, однако, значение $f(x)$, которое выдает нам прибор, измерено на самом деле в другой точке. Следовательно, среднее значение $\bar{f}(x)$ величины $f(x)$ есть наилучшая информация, которую можно получить об этой величине.

В нашем примере

$$\bar{f}(x) = const \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin C \frac{(x-\xi)}{\varepsilon^{1/3}}}{x-\xi} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-c/\varepsilon^{1/3}}^{c/\varepsilon^{1/3}} e^{-ipx}\, dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} f(\xi)\, d\xi \qquad (3.5)$$

Собственные функции $\psi_\lambda(x)$ возмущенного оператора, которые мы измеряем, являются величинами, зависящими от $\varepsilon$. При каждом фиксированном $\varepsilon$ мы производим измерение с "разрешающей плотностью" $\mathcal{Y}(x-\xi, \varepsilon)$ "попадания" в $x$ и берем среднее значение

$$\varphi(x,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin C \frac{(x-\xi)}{\varepsilon^{1/3}}}{x-\xi} \psi_\lambda(\xi)\, d\xi \qquad (3.6)$$

Регуляризованный аналогично (3.6) ряд теории возмущений дает нам с точностью до $O\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon^{1/3}}}\right)$ приближение функции $\varphi(x,\varepsilon)$ и приближение тех точек спектра $\lambda$

возмущенного оператора, для которых $\varphi(x,\varepsilon)$ не стремится к нулю. Как следует из всего предыдущего, именно величину $\varphi(x,\varepsilon)$ и требуется определить физику.

Эти рассуждения непосредственно переносятся на общий случай. Таким образом, если физик I) описывает систему, которую он возмущает, т.е. пишет невозмущенное уравнение (обладающее дискретным спектром),
2) определяет возмущение - т.е. пишет возмущенное уравнение, 3) утверждает, что на его наблюдения такое возмущение повлияет мало, то с помощью описанного метода регуляризации теории возмущений можно количественно расчитать изменения в результатах измерения физика и указать диапазон, видимости и разрешающую способность (т.е. дисперсию плотности вероятности определения координаты) его прибора.

## § 4. Постановка задачи для произвольных самосопряженных операторов.

Понятия радиуса видимости и степени точности можно обобщать на произвольные самосопряженные операторы.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H$ самосопряженный неограниченный, вообще говоря, оператор $A$ .

Пусть $\lambda^0$ - изолированная точка спектра оператора $A$ конечной кратности $m$, $d$ - расстояние от $\lambda^0$ до остального спектра.

Рассмотрим возмущенное уравнение вида:

$$[A+\varepsilon f(\varepsilon,B)]\psi=\lambda\psi ,$$

где $B$ - самосопряженный оператор, $f(\varepsilon,\mu)$ - огра-

ниченная функция при каждом фиксированном $\mu$ при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, а точка $\lambda$ расположена ближе к $\lambda^0$, чем к остальным точкам спектра оператора $A$. В этом случае регуляризация будет заключаться в обрезании высоких частот по оператору $B$.

Пусть $|\mu| \le \mu(\varepsilon)$ - максимальная область, для которой $f(\varepsilon,\mu) \le \frac{\alpha}{(2+\alpha)\varepsilon}$, где $\alpha > 0$.

(В частности, если $f(\varepsilon,B)=B$, то $\mu(\varepsilon) = \frac{\alpha}{(2+\alpha)\varepsilon}$).

Назовем $r_\varepsilon = \frac{\mu(\varepsilon)}{2}$ - радиусом видимости в диапазоне $B$.

Предположим, что оператор $A + \varepsilon f(\varepsilon, B)$ самосопряжен и $\psi_\lambda$ - его обобщенная собственная функция, такая, что функционал

$$( E_\Delta^B g, \psi_\lambda )$$

существует для любого $g \in H$ и любого фиксированного отрезка $\Delta$.

Тем самым определен элемент $f \in H$ такой, что

$$( E_\Delta^B g, \psi_\lambda ) = (g, f)$$

По определению $f = E_\Delta^B \psi_\lambda$.

Пусть $\psi_\lambda$ нормированно так, чтобы

$$E_\Delta^B \psi_\lambda \le C(\Delta),$$

где $C(\Delta)$ - константа, не зависящая от $\varepsilon$.

Определение. Семейство $\varphi(\varepsilon)$ будем называть слабо сходящемся к нулю в диапазоне оператора $B$, если $E_\Delta^B \varphi(\varepsilon)$ сильно сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в любом фиксированном

интервале

$$\Delta = [\lambda_1, \lambda_2] \quad (E^B_\Delta = E^B_{\lambda_2} - E^B_{\lambda_1})$$

Нас будет интересовать случай, когда интервал $\Delta$ сам зависит от $\varepsilon$ $\Delta_\varepsilon = \{-\tau_\varepsilon, \tau_\varepsilon\}$, и кроме того нам нужен будет не только как сам факт сходимости к нулю выражения $\| E^B_{\Delta_\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \|$ при $\varepsilon \to 0$ для некоторых функций $\varphi(\varepsilon)$, но и оценка порядка малости этой величины. Обозначим через $\mu_j(\varepsilon)$ $1 \le j \le m$ собственные значения оператора

$$R = \frac{1}{2\pi i} \oint (A + \varepsilon E^B_{\Delta_\varepsilon} f(\varepsilon, B))(A - z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [(E^B_{\Delta_\varepsilon} f(\varepsilon, B)(A - z)^{-1}]^k dz$$

где $\Gamma$ - окружность с центром в точке $\lambda^0$ радиуса $d/2$. Поскольку $\varepsilon E^B_{\Delta_\varepsilon} f(\varepsilon, B)$ по построению меньше чем $\frac{d}{2+\alpha}$, где $\alpha > 0$, то в силу леммы 1.1 приведенные ряды сходятся, а оператор $R$ является вполне непрерывным самосопряженным оператором размерности $m$ (т.е. имеющий всего $m$ собственных функций).

В связи с изложенными выше результатами и результатами гл. 2 возникает следующая гипотеза. При высказанных предположениях для какого-либо $j$ $(1 \le j \le m)$ справедливо неравенство вида

$$| \lambda - \mu_j(\varepsilon) | \, \| E^B_{\Delta_\varepsilon} \psi_\lambda \| \le C \, \| (1 - E^B_{\Delta_\varepsilon(1-\delta)}) E^A_{\lambda^0_0 - \frac{d}{2}, \lambda^0_0 + \frac{d}{2}} \| ,$$

где $C$ некоторая константа не зависящая от $\varepsilon$.

## ГЛАВА II. ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

### § I. Некоторые сведения из теории операторов.

Мы будем рассматривать линейные операторы, вообще говоря, неограниченные, действующие из некоторого банахова пространства $B_1$ в другое банахово пространство $B_2$. Таким образом, под линейным оператором $A$ понимается функция

$$V = A(u),$$

определенная на некотором линейном многообразии $D(A) \subset B_1$ со значениями в $B_2$ и удовлетворяющая условию

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A(u_1) + \beta A(u_2)$$

Область значений оператора $A$, т.е. совокупность

$$\{ Au; \quad u \in D(A) \}$$

обозначим $R(A)$. Оператор $A$ называется непрерывным, если из $u_n \to u$ следует, что $Au_n \to Au$. Оператор $A$ ограничен, если

$$\sup_{u \in D(A)} \frac{\|Au\|}{\|u\|} < \infty,$$

величина $\sup\limits_{u \in D(A)} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$ называется нормой оператора $A$ и обозначается $\|A\|$. Как известно, непрерывность линейного оператора равносильна его ограниченности. Если опе-

ратор $A$ непрерывен, то его можно продолжить по непрерывности на замкнутое подпространство $\overline{D(A)}$, рассмотрением которого (вместо всего $B_1$) можно при этом и ограничиться. Таким образом, ограниченный линейный оператор естественно считать определенным на всем пространстве.

Некоторое семейство операторов $\{A_\alpha\}$ мы будем называть ограниченным в совокупности, если существует такая константа $M$, что

$$\|A_\alpha\| \leq M$$

для всех $A_\alpha$ из рассматриваемого семейства.

Оператор $A$ называется замкнутым, если из того, что $u_n \to u$ и $A u_n \to V$ следует, что $u \in D(A)$ и $Au = V$. Всякий ограниченный оператор замкнут, но, вообще говоря, не наоборот.

Оператор $\tilde{A}$ называется расширением оператора $A$, если:

$$D(A) \subset D(\tilde{A})$$

и $Au = \tilde{A}u$ для всех $u \in D(A)$.

Ниже мы будем рассматривать, как правило, операторы или замкнутые, или такие, для которых существуют замкнутые расширения. Если оператор $A$ имеет замкнутые расширения, то среди них существует наименьшее (т.е. имеющее наименьшую область определения), называемое <u>замыканием</u> оператора $A$. Мы обозначим его $\bar{A}$.

Если область определения $D(A)$ оператора $A$ всюду плотна в $B_1$, то существует однозначно определенный

оператор $A^*$, действующий из $B_2^*$ в $B_1^*$ (звезда означает сопряженное пространство) и удовлетворяющий условию

$$(Au,\psi)=(u,A^*\psi) \qquad \text{(где } \psi\subset B_2 \text{ )}$$

для всех $u\in D(A)$

Нетрудно проверить, что сопряженный оператор всегда замкнут. Если оператор $A$ таков, что из $Au=0$ следует $u=0$, то на $R(A)$ определен обратный оператор $A^{-1}$, область значений $R(A^{-1})$ которого есть $D(A)$. Из определения замкнутости оператора видно, что $A$ замкнут в том и только том случае, если замкнут $A^{-1}$. Замкнутый оператор $A$, такой что $D(A)=B_1$, ограничен.

Пусть $A$ линейный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $H$ с плотной областью определения $D(A)$. Тогда существует

$$B=[1+A^*A]^{-1}$$

и является ограниченным самосопряженным положительным оператором, причем

$$\|B\|\leq 1$$

Оператор $AB$ также является ограниченным: $\|AB\|\leq 1$. Области определения $D(A^*)$ и $D(A^*A)$ операторов $A^*$ и $A^*A$ плотны в $H$. Оператор $A^{**}$ существует и равен $A$.

Ниже нам придется все время пользоваться понятием сходящейся последовательности операторов. Можно определять различные виды сходимости линейных операторов. Для нас будут существенны следующие: Пусть $\{A_n\}$ - последовательность

ограниченных операторов. Говорят, что эта последовательность сходится равномерно к оператору $A$, если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{A_n\}$ линейных операторов (вообще говоря неограниченных), имеющих одну и ту же область определения $D$, называется сильно сходящейся на $D$ к оператору $A$, если для всякого $u \in D$

$$\|A_n u - Au\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Наконец, последовательность $\{A_n\}$ называется сходящейся к $A$ слабо, если для любой $u \in D$ последовательность $\{A_n u\}$ слабо сходится к $Au$. Иначе говоря, это означает, что $(A_n u, \psi) \to (Au, \psi)$ для каждого $u \in D$ и каждого $\psi \in B_2^*$. Связь между этими тремя типами сходимости можно изобразить схемой.

равномерная $\to$ сильная $\to$ слабая.

Применительно к линейным преобразованиям конечномерного пространства все эти три типа сходимости означают одно и то же. В бесконечномерном случае эти понятия различны.

Сформулируем, для удобства дальнейшего изложения, известные результаты о сходящихся последовательностях линейных операторов, на которые нам придется опираться ниже.

1) Теорема (Банах-Штейнгауз). Пусть $\{A_n\}$ - ограниченная последовательность линейных операторов, действующих из $B_1$ в $B_2$, т.е. пусть $\|A_n\| \le M = const$ для всех $n$ и пусть $\|A_n f - Af\| \to 0$ для всех $f$, принадлежащих некоторому всюду плотному в $B_1$ множеству. Тогда

$$\|A_n f - Af\| \to 0$$

для всех $f \in B_1$ и $\|A\| \leq M$. [84]

2) Если последовательность $f_n \in B_1$ слабо сходится, то последовательность $\{f_n\}$ ограничена [35], [84]

3) В рефлексивном банаховом пространстве всякая ограниченная последовательность слабо компактна. [84]

4) Если в банаховом пространстве $f_n$ слабо сходится к $f$, а $\|f_n\|$ сходится к $\|f\|$, то $f_n$ сильно сходится к $f$. [35]

5) Теорема Лебега. Если последовательность измеримых функций $f_n(t)$ сходится почти всюду к $f(t)$ и ограничена некоторой интегрируемой функцией, то $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ сходится к $\int_0^1 f(t)\,dt$. [56]

Ниже нам неоднократно придется рассматривать операторы, действующие в пространстве функций со значениями в некотором банаховом (в частности гильбертовом) пространстве. Для нас существенны будут три варианта такой конструкции:

а) пусть $B_1$ - банахово пространство и $C(B_1)$ совокупность функций $u(t)$ со значениями в $B_1$, определенных на отрезке $[0, S]$ и непрерывных, т.е. таких, что $\|u(t) - u(t_0)\| \to 0$ при $t \to t_0$. В $C(B_1)$ определим норму, положив

$$\|u(t)\|_{C(B_1)} = \sup_t \|u(t)\|_{B_1}$$

при этом $C(B_1)$ становится банаховым пространством. Если $T(t)$ $(0 \leq t \leq S)$ - ограниченная полугруппа операторов в $B_1$, то ее можно рассматривать как оператор, отображающий пространство $B_1$ в пространство $C(B_1)$. [84]

б) пусть $H$ - гильбертово пространство и $L_2[H]$ - непрерывная прямая сумма пространств изоморфных $H$. Это означает, что $L_2[H]$ есть совокупность функций $h(t)$, со значениями в $H$, измеримых в том смысле, что $(h(t), h_0)$ есть измеримая числовая функция при любом $h_0 \in H$ и удовлетворяющих условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| h(t) \|_H^2 \, dt < \infty$$

Если в $L_2[H]$ скалярное произведение элементов $h(t)$ и $g(t)$ определить как

$$\left( h(t), g(t) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( h(t), g(t) \right)_H dt ,$$

то $L_2[H]$ будет гильбертовым пространством, сепарабельным, если сепарабельно $H$.

Нам понадобится следующий факт: если $h(t), g(t) \in L_2[H]$ стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$ и $h'(t)$ и $g'(t) \in L_2[H]$, то справедливо равенство:

$$\left( \frac{d}{dt} h(t), g(t) \right) = - \left( h(t), \frac{d}{dt} g(t) \right).$$

Для доказательства этого равенства реализуем $H$ в виде пространства последовательностей $\ell_2$. Тогда каждый элемент из $L_2[H]$ будет представлять собой последовательность $\{ a_n(t) \}$, где $a_n(t)$ - измеримые числовые функции и

$$\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a_n^2(t) \, dt < \infty .$$

Скалярное произведение двух элементов $a$ и $b$ из $L_2[H]$ запишется при этом в виде

$$(a, b) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a_n(t) b_n(t)\, dt.$$

Если все $a_n(t)$ и $b_n(t)$ стремятся к нулю при $|t| \to \infty$ и $\{a_n'(t)\}, \{b_n'(t)\}$ представляют собой элементы из $L_2[H]$, то при каждом $n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_n'(t) b_n(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} a_n(t) b_n'(t)\, dt$$

и следовательно

$$\sum \int_{-\infty}^{\infty} a_n'(t) b_n(t)\, dt = -\sum \int_{-\infty}^{\infty} a_n(t) b_n'(t)\, dt.$$

Пусть $B$ – банахово пространство, и $L_1(B)$ совокупность функций $u(t)$ со значениями в $B$, определенных на отрезке $[0, S]$ и таких, что $\| u(t) \|_B$ интегрируема по $t$ на $[0, S]$. В $L_1(B)$ определим норму, положив

$$\| u(t) \|_{L_1(B)} = \int_0^1 \| u(t) \|_B\, dt,$$

при этом $L_1(B)$ становится банаховым пространством. Функции со значениями в $B$ принадлежащие $L_1(B)$ называются функциями интегрируемыми по Бохнеру.

Множество двузначных функций фундаментально в $L_1(B)$, т.е. линейная оболочка этого множества плотна в $L_1(B)$. [84]

## § 2. Основной метод оценок решения.

Пример. Основную идею метода, с помощью которого получены оценки, мы изложим вначале на простом примере.

Рассмотрим в $L_2[R^2]$ оператор

$$\hat{L} = A\frac{\partial}{\partial x} + B = A(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + B\left(x,y,\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где линейный оператор $B\left(x,y,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ коммутирует с $x$

$A(x,y)$ - числовая функция, $|A(x,y)| \leqslant 1$

Предположим вначале, что $\hat{L}^{-1}$ существует и ограничен:

$$\|\hat{L}^{-1}\| \leqslant N$$

Пусть $u \in L_2$ - решение уравнения

$$\hat{L}u = f(x,y), \quad f \in L_2 \quad \text{и} \quad f(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant \tilde{x}$$

Очевидно, что, если $\varphi(x)$ кусочно дифференцируемая функция, причем $\varphi(x)\, f(x,y) = 0$, то $\hat{L}(\varphi u) =$
$= \hat{L}(\varphi u) - \varphi f = [\hat{L}, \varphi]\, u = A\varphi'_x\, u.$
(квадратные скобки означают коммутатор).

Следовательно:

$$\|\varphi(x)\, u\|^2 \leqslant N^2 \|\varphi'_x\, u\|^2.$$

Полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-\xi)^k & \text{при } x > \xi \\ 0 & \text{при } x \leqslant \xi \end{cases}$$

где $k$ любое целое, а $\xi > \tilde{x}$ ,

получим

$$\int\limits_{\xi}^{\infty}(x-\xi)^{2k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy\,dx \leq N^2k^2\int\limits_{\xi}^{\infty}(x-\xi)^{2k-2}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy \tag{2.I}$$

При $k=1$ интегралы в правой части неравенства сходятся. Из неравенства следует сходимость интеграла, стоящего в левой части. Предположим по индукции, что интеграл

$$\int\limits_{\xi}^{\infty}(x-\xi)^{2k-2}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy$$

сходится. Из неравенства (2.I) будет следовать сходимость

$$\int\limits_{\xi}^{\infty}(x-\xi)^{2k}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy\,.$$

Отсюда следует, что, все интегралы в (2.I) сходятся при $k=n$, где $n$ - любое положительное число.

Обозначим

$$\Phi_n(\xi)=\int\limits_{\xi}^{\infty}(x-\xi)^{2n}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2\,dy$$

Тогда из неравенства (2.I) будет следовать

$$\Phi_n(\xi)\leq N^2\,\frac{n^2}{2n(2n-1)}\,\Phi_n''(\xi)$$

Это неравенство позволяет оценить интеграл

$$\int\limits_{\xi}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2(x,y)\,dy$$

при больших $\xi$.

Поскольку $n$ сколь угодно велико, то имеем:

$$\Phi_n(\xi) \le \frac{N^2}{4}(1+\delta_n)\,\Phi_n'' ,$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$

Домножим обе части неравенства на $\Phi_n'$ и проинтегрировав от $\xi$ до $\infty$, мы придем к неравенству

$$\Phi_n^2(\xi) \le \frac{N^2}{4}(1+\delta_n)(\Phi_n')^2$$

Отсюда, учитывая, что $\Phi_n(\infty)=0$ получим:

$$\Phi_n(\xi) \le e^{-\frac{2}{N}(1-\delta_n)(\xi-\xi_0)}\,\Phi_n(\xi_0) \qquad (2.2)$$

Приведем пример в случае обыкновенного дифференциального уравнения, когда оценка (2.2) достигается при $\delta_n=0$

Пусть $\hat{L}=\frac{d}{dx}+1$. Тогда $\|\hat{L}^{-1}\|<1$

Пусть $\hat{L}u=0$ при $x>a$, тогда при $x>a$,

$$u=Ce^{-x} \quad \text{и} \quad \int_\xi^\infty (x-\xi)^{2n}\cdot u^2dx=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}}Ce^{-2\xi}.$$

Следовательно,

$$\Phi_n(\xi)=e^{-2(\xi-\xi_0)}\,\Phi_n(\xi_0)$$

что и требовалось.

Из (2.2) следует оценка для $\int_\xi^\infty u^2dx$, поскольку

$$\int\limits_{\xi+1}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \le \int\limits_{\xi+1}^{\infty} (x-\xi)^{2n} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \le \int\limits_{\xi}^{\infty} (x-\xi)^{2n} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 dy =$$

$$= \Phi_n(\xi).$$

Замечание I.

Нетрудно видеть, что от оператора $B$ требуется лишь, чтобы он коммунировал с $\varphi(x)$. От оператора $A$ помимо этого требуется ограниченность. Следовательно, $B$ может быть матрицей, содержащей производные по всем аргументам, за исключением $x$, с любыми коэффициентами, зависящими от всех переменных. Оператор $A$ может быть матрицей с ограниченными элементами, зависящими от всех переменных. Иначе говоря, $A(x)$ и $B(x)$ суть операторы в некотором гильбертовом пространстве $H$, зависящие от $x$, как от параметра. Будем обозначать норму $g \in H$ через $\|g\|_H$. Оператор $\hat{L} = A\frac{\partial}{\partial x} + B(x)$ мы будем рассматривать в гильбертовом пространстве $L_2[H]$ функций от $x$ с интегрируемым квадратом со значениями в $H$.
Если $A(x)$ и $B(x)$ матрицы, то элемент $h \in L_2[H]$ будет столбцом $h_\nu$ и в определение нормы войдет также сумма по индексу $\nu$. Так что оценки (2.I) остаются справедливыми для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка по $x$.

Аналогичный метод можно применить в банаховых пространствах.

Замечание 2.

При выводе формул (2.I) мы требовали существование и ограниченность $\hat{L}^{-1}$.

Однако, если учесть, что $\varphi(x)=0$ при $x<\xi$, то станет ясно, что достаточно потребовать существование и ограниченность оператора $\hat{L}_\xi^{-1}$, где $\hat{L}_\xi$ - сужение оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L}_\xi = \hat{L}$$

на множестве функций, обращающихся в нуль при $x<\xi$ $(\hat{L}_\xi \subset \hat{L})$
При этом норма обратного оператора $\| \hat{L}_\xi^{-1} \| = N(\xi)$ будет зависеть от $\xi$, и в неравенствах (2.I) вместо $N$ можно написать $N(\xi)$.

Это замечание особенно будет важно, когда мы перейдем к операторам вида

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + B(x)$$

например, не имеющим обратного.

Здесь, если $B(x)>0$ при $x>a$, причем $B(x)>N(\xi)$ при $x>\xi\geq a$, то на функциях, равных нулю при $x<\xi$, обратный оператор $\hat{L}_\xi^{-1}$ будет существовать, причем

$$\| \hat{L}_\xi^{-1} \| \leq N(\xi)$$

## § 3. Дифференциальное уравнение второго порядка с операторными коэффициентами.

Изложенный метод мы применим для получения оценок собственных функций самосопряженных операторов.

Рассмотрим пространство $L_2(H)$ функций $g(x)$ со

значениями в некотором гильбертовом пространстве $H$:

$$\|g\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\|g(x)\|_H^2\,dx;\quad (g_1,g_2)=\int_{-\infty}^{\infty}(g_1(x),g_2(x))_H\,dx$$

Рассмотрим в $L_2(H)$ самосопряженный оператор вида

$$\hat{L}=-\frac{d^2}{dx^2}+B(x), \tag{3.0}$$

где $B(x)$ коммутирует с оператором умножения на $x$ и удовлетворяет условию

$$\int_{\xi}^{\infty}\left(B(x)g(x),g(x)\right)_H dx\geq d^2\int_{\xi}^{\infty}\|g(x)\|_H^2\,dx \tag{3.1}$$

при $\xi\to\infty$ и $g(x)\in D(B(x))$ ($D(B)$ область определения оператора $B$).

Теорема 2.1. [51, 10)]

Пусть $\lambda$ - точка дискретного спектра оператора $\hat{L}$; $d<\infty$ - расстояние от точки $\lambda$ до предельного спектра оператора $\hat{L}$, $a=\alpha^2-\lambda$. Каждая собственная функция $\psi(x)$ оператора $\hat{L}$, отвечающая собственному значению $\lambda$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{\xi}^{\infty}\|\psi(x)\|_H^2\,dx\leq C(\delta)e^{-2(1-\delta)\omega\xi}, \tag{3.2}$$

где $\delta>0$ - любое заданное число, $C(\delta)$ - константа, зависящая от $\delta$, а

$$\omega=\left[0{,}4a+(0{,}16a^2+0{,}2d^2)^{1/2}\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

и является точной константой x/ .

Следствие. Пусть $\psi(x,y,z)$ - собственная функция уравнения Шредингера $-\Delta\psi + u(x,y,z)\psi = \lambda\psi$ и пусть

$$\operatorname{Inf}_{x\to\infty} u(x,y,z) \geq \alpha^2$$

Известно [23] , что для этого случая

$$|\psi(x,y,z)|^2 = |\psi(P)|^2 \leq C\int_{PQ\leq 1} |\psi(Q)|^2 dQ, \qquad (3.4)$$

где $PQ$ - расстояние между точками $P$ и $Q$ .
Из (3.2) и (3.4) следует

$$|\psi(x,y,z)|^2 \leq C\int_{x-1}^{\infty} dx' \iint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x',y',z')|^2 dy'dz' \leq$$

$$\leq \tilde{C}(\varepsilon)\, e^{-2(1-\varepsilon)\omega x},$$

где $\omega$ выражается формулой (3.3). Из этой оценки следует оценка Э.Э.Шноля / 88 /, который еще в 1957 г. получил $\omega \sim \ln d$

Замечание. Пусть $H$ - числовая прямая, $B(x) = u(x) \to \alpha$ при $|x| \to \infty$. Тогда $a = \alpha^2 - \lambda = d$ и мы получим из (3.3) $\omega = \sqrt{a}$ . На самом деле в этом случае $\psi(x) \sim e^{-\sqrt{a}x}$. Таким образом, в этом примере значе-

---

x/ См. замечание.

ние константы $\omega$ достигается.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

<u>Лемма 2.I</u>

Пусть $g(x) \in \mathcal{D}(\hat{L})$, причем $g(x)=0$ и $\hat{L}\, g(x)=0$ при $x \leq \xi$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\xi_\varepsilon$, не зависящее от $g$ и такое, что при $\xi > \xi_\varepsilon$

$$(d-\varepsilon)^2 \| g(x) \|^2 \leq \| [\hat{L}-\lambda]\, g(x) \|^2 \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\lambda$ — $p$ - кратное собственное значение, $\psi_\lambda^i$, $i=1,..,p$ - его собственные функции, а $\psi_{\lambda_k}$ - остальные собственные функции оператора $\hat{L}$. Докажем неравенство

$$\|g(x)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} |(g,\psi_\lambda^i)|^2 + \sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda \\ |\lambda_k-\lambda| \leq d-\varepsilon}} \{(\psi_{\lambda_k},[\hat{L}-\lambda]g)^2 \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} - \frac{1}{(d-\varepsilon)^2} \right] \Big\} + \frac{1}{(d-\varepsilon)^2} \| [\hat{L}-\lambda] g \|^2 . \tag{3.6}$$

Обозначив $f=(\hat{L}-\lambda)\, g$, а через $R_\lambda$ резольвенту оператора $A$ в точке $\lambda$ (на подпространстве ортогональном $\psi_\lambda^i$, $i=1,2,..,p$), получим

$$\|g\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (g,\psi_\lambda^i)^2 = \|g - \sum_{i=1}^{p} (g,\psi_\lambda^i)\psi_\lambda^i\|^2 = \|R_\lambda f\|^2 =$$

$$=\Big\|\sum_{|\lambda-\lambda_k|\le d-\varepsilon}(\psi_{\lambda_k},f)R_\lambda\psi_{\lambda_k}+R_\lambda\Big\{f-\sum_{|\lambda-\lambda_k|\le d-\varepsilon}(\psi_{\lambda_k},f)\psi_{\lambda_k}\Big\}\Big\|^2=$$

$$=\sum_{|\lambda-\lambda_k|\le d-\varepsilon}\frac{(\psi_{\lambda_k},f)^2}{(\lambda_k-\lambda)}+\Big\|R_\lambda(f-\sum_{|\lambda-\lambda_k|\le d-\varepsilon}(\psi_{\lambda_k},f)\psi_{\lambda_k}\Big\|^2\le$$

$$\le\sum_{|\lambda-\lambda_k|\le d-\varepsilon}\frac{(\psi_{\lambda_k},f)^2}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\Big\{\|f\|^2-\sum_{|\lambda-\lambda_k|\le d-\varepsilon}(\psi_{\lambda_k},f)^2\Big\}$$

Отсюда следует (3.6).

В силу условия леммы имеем

$$(g,\psi_\lambda^i)^2\le\int_\xi^\infty\|\psi_\lambda^i\|_H^2\,dx\,\|g\|^2$$

$$([\hat L-\lambda]g,\psi_{\lambda_k})^2\le\int_\xi^\infty\|\psi_{\lambda_k}\|_H^2\,dx\cdot\|[\hat L-\lambda]g\|^2$$

Отсюда и из (3.6) следует неравенство

$$\|g(x)\|^2\le\|g\|^2\sum_{i=1}^{p}\int_\xi^\infty\|\psi_\lambda^i\|_H^2\,dx+\|(\hat L-\lambda)g\|^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{\substack{\lambda_k\ne\lambda\\ |\lambda_k-\lambda|\le d-\varepsilon}}\int_\xi^\infty\|\psi_{\lambda_k}\|_H^2\,dx\Big\{\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2}-\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\Big\}+\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\|(\hat L-\lambda)g\|^2$$

Отсюда при $\xi>\xi_\varepsilon$

$$\|g(x)\|^2\le O_1(\varepsilon)\|g\|^2+O_2(\varepsilon)\|[\hat L-\lambda]g\|^2+\frac{1}{(d-\varepsilon)}\|[\hat L-\lambda]g\|^2$$

Следовательно,

$$(d-\varepsilon)^2 (1-O_1(\varepsilon)) \|g(x)\|^2 \le (O_3(\varepsilon)+1)\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2$$

или

$$(d-O_4(\varepsilon))^2 \|g(x)\|^2 \le \|(\hat{L}-\lambda)g\|^2$$

Обозначая $O_4(\varepsilon)$ снова через $\varepsilon$, получим утверждение леммы 2.I.

Доказательство теоремы. Пусть $\varphi(x)$ - дважды дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x<\xi$

Имеем

$$\|[\hat{L}-\lambda]\varphi(x)\psi(x)\|^2 = \|\varphi''\psi+2\varphi'\psi'\|^2 =$$

$$= \|\varphi''\psi\|^2 + 4(\varphi''\psi,\varphi'\psi') + 4\|\varphi'\psi'\|^2 \qquad (3.7)$$

Очевидны тождества

$$2(\varphi''\psi,\varphi'\psi') = -([\varphi''\varphi']'\psi,\psi)$$

$$0 = ([\varphi']^2\psi,[\hat{L}-\lambda]\psi) = -([\varphi']^2\psi,\psi'') +$$

$$+([(B-\lambda)]\psi\varphi',\varphi'\psi) =$$

$$= 2(\varphi'\varphi''\psi,\psi') + \|\varphi'\psi'\|^2 + ([B-\lambda]\varphi'\psi,\varphi'\psi) \qquad (3.8)$$

Из (3.8) следует в силу условия (3.I) при достаточно большом $\xi$

$$-\|\varphi'\psi'\|^2 - 2(\varphi'\varphi''\psi,\psi') \ge a\|\varphi'\psi\|^2 \qquad (3.8)'$$

Из (3.5), (3.8), (3.8)' и (3.7) следует

$$(d-\varepsilon)^2\|\varphi\psi\|^2 \le \|\varphi''\psi\|^2 + 2([\varphi''\varphi']\psi,\psi) -$$
$$-4a\|\varphi'\psi\|^2 \qquad (3.9)$$

Положим теперь $\varphi(x)=(x-\xi)$ при $x>\xi$ и нулю при $x<\xi$ По индукции из неравенства (3.9) следует, что

$$\Phi(\xi)=\|\varphi\cdot\psi\|^2=\int_{\xi}^{\infty}(x-\xi)^{2n}\|\psi\|_H^2\,dx$$

существует при любом $n$. Неравенство (3.9) при достаточно большом $n>n_{\varepsilon_1}$ принимает вид

$$16\,d^2(1-\varepsilon_1)\,\Phi\le 5\,\Phi^{(IV)}-16a\,\Phi''$$

Отсюда следует, что $\Phi(\xi)$ удовлетворяет неравенству:

$$5\,\Phi^{(IV)}-16a\Phi''-16d^2(1-\varepsilon_1)\,\Phi\geqslant 0 \qquad (3.10)$$

Корни характеристического многочлена, соответствующего оператору, стоящему в левой части неравенства, имеют вид

$$\beta^2=\frac{8a-\sqrt{64a^2+80d^2(1-\varepsilon_1)}}{5}$$

$$\gamma^2=\frac{8a+\sqrt{64a^2+80d^2(1-\varepsilon_1)}}{5}=4\,\omega^2(1-\varepsilon_2)$$

Обозначим $\mathcal{F}(\xi)=\Phi''-\beta^2\Phi=\Phi''+|\beta|^2\Phi$

Тогда из (3.10) следует

$$(\mathcal{F}''-\gamma^2\mathcal{F})\geqslant 0 \qquad (3.11)$$

Умножив на $\mathcal{F}'$ обе части неравенства (3.11) и проинтегрировав с учетом, что $\mathcal{F}(\infty)=\mathcal{F}'(\infty)=0$, получим

$$\left(\mathcal{F}'(\xi)\right)^2 \geqslant \gamma^2 \left(\mathcal{F}(\xi)\right)^2$$

Отсюда, поскольку $\mathcal{F}'(\xi)<0$, имеем

$$\mathcal{F}(\xi) \leqslant C e^{-\gamma\xi},$$

т.е.

$$\Phi'' + |\beta|^2 \Phi \leqslant C e^{-\gamma\xi},$$

и в силу того, что $\Phi''(\xi)>0$, $\Phi(\xi)>0$,

имеет место неравенство

$$\Phi(\xi) \leqslant C_1 e^{-\gamma\xi} \tag{3.12}$$

Поскольку

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi\|_H^2 dx \leqslant \Phi(\xi-1), \tag{3.13}$$

то отсюда получается неравенство

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi\|_H^2 \, dx \leqslant C_2(\varepsilon) e^{-\gamma\xi} = C_2(\varepsilon) e^{-2\omega(1-\varepsilon)\xi},$$

что и требовалось.

## § 4. Оператор первого порядка.

Изложенный метод может быть применен также для оценки собственных функций самосопряженных операторов первого порядка по $x$ вида

$$\hat{L} = A\frac{d}{dx} + B(x), \tag{4.1}$$

где $\|A\| \leqslant 1$, в частности для собственных функций ста-



5-1419

ционарного уравнения Дирака [x] .

Пусть $\lambda$ - собственное значение, а $\psi$ - соответствующая собственная функция оператора $\hat{L}$ , $\varphi(x) \in C^2$ и равна нулю при $x < \xi$ , тогда

$$\left[ A \frac{d}{dx} + B(x) - \lambda \right] \psi \varphi(x) = A \varphi' \psi$$

т.е. $$[ \hat{L} - \lambda ] \psi \varphi(x) = A \varphi' \psi$$

В силу леммы 2.I для достаточно большого $\xi > \xi_\varepsilon$

$$(d-\varepsilon)^2 \|\varphi \psi\|^2 \leq \|A \varphi' \psi\|^2 \leq \|\varphi' \psi\|^2$$

Аналогично предыдущему, полагая

$\varphi(x) = (x-\xi)^n$ при $x > \xi$ и нулю при $x < \xi$

и $\Phi(\xi) = \|\varphi \psi\|^2$ , получим при достаточно большом

$n > n_{\varepsilon_1}$ $$\Phi'' \geq 4(d-\varepsilon_1)^2 \Phi$$

Аналогично (3.I2) получим

$$\Phi(\xi) \leq C_1 e^{-2(d-\varepsilon_1)\xi}$$

Отсюда в силу (3.I3)

---

x/ Если в уравнении Дирака [10],[86] коэффициенты не зависят от $t$ , то с помощью замены функции вида $\psi = e^{i\lambda t} \varphi$ мы придем к стационарному уравнению Дирака для функции $\varphi$ .

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi\|_H^2 \, dx \le C_2(\varepsilon_1)\, e^{-2(d-\varepsilon_1)\xi}$$

Нетрудно убедиться на примере обыкновенного дифференциального оператора, что эта оценка достигается при $\varepsilon_1 = 0$. Итак доказана.

Теорема 2.2.

Для собственных функций опèратора (4.I) справедлива теорема 2.2, причем $\omega = d$ и является точной константой.

§ 5. Основная оценка для собственных функций.

Рассмотрим самосопряженный оператор вида

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{d}{dx} + B(\eta, x), \quad \|A(\eta)\| \le 1$$

коэффициенты которого зависят от некоторого параметра $\eta$. Напомним, что если $g \in L_2(H)$ равно нулю при $x < \xi$ и $\hat{L} g = 0$ при $x < \xi$, то в силу леммы 2.I для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\xi_\varepsilon$, не зависящее от $g$, что при $\xi \geqslant \xi_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$(d-\varepsilon)^2 \|g\|^2 \le \|[\hat{L} - \lambda] g\|^2 \tag{5.I}$$

Фиксируем $\xi_\varepsilon$ для данного оператора $\hat{L}$.
Положим $x_0^\gamma = (\xi_\varepsilon)^\gamma$, где $\gamma$ - любое число, больше единицы. Совершим перенос начала координат в точку $x_0^\gamma$. Рассмотрим в новой системе координат $y = x - x_0^\gamma$ функцию:

$$\varphi(y, \xi) = \begin{cases} (y^2 - \xi^2)^n & \text{при } \xi^2 \geqslant y^2 \\ 0 & \text{при } y^2 > \xi^2 \end{cases}$$

Пусть $\xi \le x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$, тогда из $x < \xi_\varepsilon$ следует $x < x_0^\gamma - \xi$, т.е. $(x - x_0^\gamma)^2 > \xi^2$, значит $y^2 \geqslant \xi^2$. Следовательно, $\varphi(y,\xi)$ равна нулю при $x < \xi_\varepsilon$.

Оператор

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{d}{dx} - B(\eta, x)$$

в новой системе координат будет иметь вид:

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{d}{dy} - B(\eta, y + x_0^\gamma)$$

Пусть $u(y) \in H$ при любом $|y| \le x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$ удовлетворяет уравнению:

$$A(\eta)\frac{du}{dy} - B(\eta, y + x_0^\gamma)\, u = \lambda u$$

Очевидно, что неравенство (5.I) будет справедливо для функции $g = \varphi(y,\xi)\, u(y)$, поскольку при $x < \xi_\varepsilon$ имеем $g = 0$ и $\hat{L} g = 0$

Таким образом,

$$(d-\varepsilon)^2 \| \varphi u \|^2 \le \| \varphi'_y u \|^2$$

Обозначим

$$\Phi(\xi) = \|\varphi u\|^2 = \int_{-\xi}^{\xi} (\xi^2 - y^2)^{2n} \|u(y)\|_H^2 \, dy.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\| \varphi'_y u \|^2 = \frac{n}{2(2n-1)} \left\{ \Phi'' - \frac{4n-1}{\xi} \Phi' \right\}$$

Положив $\frac{1}{n} = O(\varepsilon)$, получим:

$$(d - O_1(\varepsilon))^2 \Phi \le \frac{1}{4}\Phi'' - \frac{n - \frac{1}{4}}{\xi}\Phi' \le \frac{1}{4}\Phi'',$$

поскольку $\Phi' > 0$ и $\xi \geqslant 0$

Отсюда, обозначая $C_1(\varepsilon)$ снова через $\varepsilon$, получаем

$$\Phi'\Phi'' \geqslant 4(d-\varepsilon)^2 \Phi\Phi'$$

или

$$\frac{d}{d\xi}(\Phi') \geqslant 4(d-\varepsilon)^2 \frac{d}{d\xi}\Phi^2$$

Проинтегрировав от нуля до $\xi$, получим

$$\Phi' \geqslant 2(d-\varepsilon)\Phi$$

или

$$\frac{d}{d\xi}\ln\Phi \geqslant 2(d-\varepsilon)$$

Проинтегрировав это неравенство от $a>1$ до $\xi$, получим

$$\ln\frac{\Phi(\xi)}{\Phi(a)} \geqslant 2(d-\varepsilon)(\xi-a)$$

т.е.

$$\Phi(\xi) \geqslant e^{2(d-\varepsilon)(\xi-a)}\Phi(a)$$

Поскольку

$$\int_{-a+1}^{a-1}\|u(y)\|_H^2\,dy \leqslant \int_{-a}^{a}(y^2-a^2)^{2n}\|u(y)\|_H^2\,dy$$

$$\int_{-\xi}^{\xi}(y^2-\xi^2)^{2n}\|u(y)\|_H^2\,dy \leqslant \xi^{4n}\int_{-\xi}^{\xi}\|u(y)\|_H^2\,dy,$$

то при $\xi < x_0^{\gamma}-\xi_\varepsilon$ мы получаем:

$$\int_{-\xi}^{\xi}\|u(y)\|_H^2\,dy \geqslant \xi^{-4n}\Phi(\xi) \geqslant \xi^{-4n}e^{2(d-\varepsilon)(\xi-a)}\Phi(a) \geqslant$$

$$\geqslant C(a,\varepsilon)\, e^{2(d-2\varepsilon)(\xi-b)} \int_{-b}^{b} \|u(y)\|_H^2\, dy ,$$

где $b = a-1$,

поскольку $\xi^{-4n} \geqslant C(b,\varepsilon)\, e^{-2\varepsilon(\xi-b)}$

Переходя к координатам $x$ и обозначая $2\varepsilon$ снова через $\varepsilon$, получим:

$$\int_{x_0^\gamma-b}^{x_0^\gamma+b} \|u(x)\|_H^2\, dx \leqslant C_1(b,\varepsilon)\, e^{-2(d-\varepsilon)\xi} \int_{x_0^\gamma-\xi}^{x_0^\gamma+\xi} \|u(x)\|_H^2\, dx$$

Положим $\xi = x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$, тогда

$$\int_{x_0^\gamma-b}^{x_0^\gamma+b} \|u\|_H^2\, dx \leqslant C_1(b,\varepsilon)\, e^{-2(d-\varepsilon)(x_0^\gamma-\xi_\varepsilon)} \int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0^\gamma-\xi_\varepsilon} \|u(x)\|_H^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_2(b,\varepsilon)\, e^{-2(d-\varepsilon)x_0^\gamma} \int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0^\gamma} \|u(x)\|_H^2\, dx \tag{5.2}$$

Константа $C_2(b,\varepsilon) = C_1(b,\varepsilon)\, e^{2d\xi_\varepsilon}$ не зависит от $\gamma$

Таким образом неравенство (5.2) справедливо при любом $\gamma > 1$. Полагая $\gamma = \dfrac{\ln(\eta/2)}{\ln x_0}$

мы придем к следующему утверждению

<u>Лемма x/ 2.2.</u>

Пусть $\eta$ - некоторый параметр, стремящийся к $\infty$

---

x/ Из этой леммы легко устанавливается класс единственности для уравнения (4.I). Именно, если $u(x)$ удовлетворяет (4.I) и $\int_0^\xi \|u(x)\|_H^2\, dx \leqslant C(\varepsilon)\, e^{(d-\varepsilon)\xi}$, то $u(x) \in L_2[H]$ и справедлива оценка теоремы 2.2.

Пусть $u(x) \in H$ при любом $x$ и при $x<\eta$ удовлетворяет уравнение

$$A(\eta)\frac{du}{dx} + B(\eta,x)\,u = \lambda u \qquad \|A(\eta)\|_H \leq 1$$

Тогда для любого $a>0$ и $\varepsilon>0$ найдется такое $C(a,\varepsilon)$, что

$$\int\limits_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2\,dx \leq C(a,\varepsilon)\,e^{-d(1-\varepsilon)\eta}\int\limits_0^{\eta}\|u\|_H^2\,dx \tag{5.3}$$

Заметим, что $u(x)$, вообще говоря, может и не принадлежать $L_2[H]$.

## § 6. 2 леммы абстрактной теории возмущений.

Докажем теперь две нужные для дальнейшего леммы (см [18], [13])

**Лемма 2.3.**

Пусть $A$ - самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, лежащей в гильбертовом пространстве $H$ и областью значений, лежащей там же.

Пусть $\mu$ - некоторая точка на вещественной прямой, а $d$ - расстояние от этой точки до спектра оператора $A$. Тогда для любого $g \in D(A)$ справедливо неравенство

$$d\|g\| \leq \|(A-\mu)g\| \tag{6.1}$$

**Доказательство**

Если точка $\mu$ принадлежит спектру оператора $A$, то $d=0$ и неравенство (6.1) очевидно. Пусть точка $\mu$ не

принадлежит спектру оператора $A$. Тогда неравенство (6.I) следует непосредственно из известного неравенства:

$$\|(A-\mu)^{-1}\| \le \frac{1}{d}$$

(см. /65/ ).

Действительно, обозначив $f=(A-\mu)g$, получим

$$\|g\| = \|(A-\mu)^{-1} f\| \le \|(A-\mu)^{-1}\| \cdot \|f\| \le \frac{1}{d}\|f\| \le \frac{1}{d}\|(A-\mu)g\|,$$

что и требовалось.

<u>Лемма 2.4</u>

Пусть $\lambda_0$ - некоторая изолированная точка спектра самосопряженного оператора $A$.
Обозначим через $M_{\lambda_0}$ - весь оставшийся спектр оператора $A$.

( $M_{\lambda_0}$ - множество, равное спектру $\sigma_\lambda$, из которого выброшена одна точка $\lambda=\lambda_0$ ).
Пусть $d_{\lambda_0}$ - расстояние от точки $\mu$ до множества $M_{\lambda_0}$.

Обозначим через $P_{\lambda_0}$ - проекционный оператор на подпространство собственных функций, соответствующих точке $\lambda_0$.
Тогда для $g \in D(A)$ справедливо неравенство

$$d_{\lambda_0} \|(1-P_{\lambda_0})g\| \le \|(A-\mu)g\|$$

Доказательство.

Ортогональное дополнение к подпространству собственных функций, соответствующих $\lambda_0$, инвариантно относительно оператора А. Поэтому неравенство (6.I), написанное для этого ортогонального дополнения, будет иметь вид

$$\| (A-\mu)^{-1} (1-P_{\lambda_0}) f \| \le \frac{1}{d_{\lambda_0}} \| (1-P_{\lambda_0}) f \|,$$

где $f$ произвольный элемент из $H$.
Поэтому, положив $f=(A-\mu)g$, получим (поскольку $P_{\lambda_0}$ коммутирует с $A$)

$$\|(1-P_{\lambda_0})g\| = \|(1-P_{\lambda_0})(A-\mu)^{-1} f\| = \|(A-\mu)^{-1}\cdot(1-P_{\lambda_0})f\| \le$$

$$\le \frac{1}{d_{\lambda_0}} \|(1-P_{\lambda_0})(A-\mu)g\| =$$

$$= \frac{\|(A-\mu)g\|}{d_{\lambda_0}}.$$

## § 7. Теория возмущений оператора первого порядка.

**Лемма 2.5**

Пусть $u$ - решение уравнения

$$[\hat{L}-\lambda]u = A(\eta)\frac{du}{dx} + B(\eta,x)u + V(\eta,x)u - \lambda u = 0, \tag{7.I}$$

удовлетворяющее условию $\int_0^x \|u\|_H^2\, dx \le C e^{\varepsilon x}$,

где $C=C(\varepsilon)$ не зависит от $\eta$, для любого

положительного $\varepsilon$, и пусть $V(\eta,x)=0$ при $|x|<\eta$

$d$ - расстояние от точки $\lambda$ до предельного спектра оператора $\hat{L}_0$:

$$\hat{L}_0 \psi = A(\eta)\frac{d\psi}{dx} + B(\eta,x)\psi ,$$

тогда

I) $$\int\limits_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 \leq C(a,\varepsilon)\, e^{-d(1-\varepsilon)\eta} ,$$

где $a>0$.

II) Найдется такое собственное значение $\mu$ оператора $\hat{L}_0$, что

I) $$|\mu-\lambda| \leq \frac{C(\varepsilon)\ e^{-d(1-\varepsilon)\eta}}{\left(\int\limits_0^{\eta/2} \|u\|_H^2\, dx\right)^{1/2}}$$

2) $$\int\limits_0^{\eta/2} \Big\| u - \sum_{i=1}^{p}\Big[\int\limits_0^{\eta/2} (u,\psi_\mu^i)_H\, dx\Big]\psi_\mu^i \Big\|_H^2 dx \leq \frac{C(\varepsilon)}{d_\mu}\, e^{-d(1+\varepsilon)\eta} ,$$

где $d_\mu$ - расстояние от точки $\mu$ до остального спектра $\hat{L}_0$, $\psi_\mu^i$, $i=1,\dots,p$ - ортонормированный базис собственного подпространства оператора $\hat{L}_0$, отвечающего точке $\mu$.

**Доказательство.**

Очевидно, что при $|x|<\eta$

$$\hat{L}_0 u = A(\eta)\frac{du}{dx} + B(\eta,x)u = \lambda u$$

Поэтому в силу оценки (5.3) и условия леммы для достаточно больших $\eta$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2\,dx \le C(a,\varepsilon)\int\limits_0^{\eta}\|u\|_H^2\,dx\cdot e^{-\alpha(1-\varepsilon)\eta}$$

Отсюда и из (7.I) следует утверждение I) леммы 2.5

Возьмем функцию $\varphi(x)$, равную единице при $|x|<\eta/2$, равную нулю при $|x|>\frac{\eta}{2}+a$, а в промежутке $\eta/2\le|x|\le\eta/2+a$ линейную: $\varphi(x) = 1+\frac{1}{a}(\eta/2-x)$.

В силу того, что $\varphi(x)\cdot V(\eta,x)=0$, а $\hat{L}u=\lambda u$, имеем

$$\varphi(x)\hat{L}_0 = \varphi(x)\hat{L}, \quad a \quad \varphi(x)[\hat{L}-\lambda]u=0$$

Отсюда $\quad [\hat{L}-\lambda]\,\varphi(x)u = A(\eta)\varphi'(x)u.$

Из леммы 2.3 абстрактной теории возмущений следует, что найдется собственное значение $\mu$ оператора $\hat{L}_0$, такое, что

$$|\mu-\lambda| \le \frac{\|A(\eta)\varphi' u\|}{\|\varphi(x)u\|} \le \frac{\left(\int\limits_{\eta/2}^{\eta/2+a}\|u\|_H^2\,dx\right)^{1/2}}{\|\varphi(x)u\|} \le$$

$$\le \frac{C(a,\varepsilon)\,e^{-\alpha(1-\varepsilon)\eta}}{\left(\int\limits_0^{\eta/2}\|u\|_H^2\,dx\right)^{1/2}}$$

И кроме того из леммы 2.4 абстрактной теории возмущений получим

$$\left\| \varphi(x)\, u - \sum_{i=1}^{p} (\varphi(x)\, u, \psi_\mu^i) \right\| \le \frac{C(a,\varepsilon)}{d_\mu} e^{-d(1-\varepsilon)\tau}$$

т.е.

$$\int_0^{\tau/2} \left\| u - \sum_{i=1}^{p} (\varphi(x)\, u, \psi_\mu^i)\, \psi_\mu^i \right\|_H^2 dx \le \frac{C(a,\varepsilon)}{d_\mu} e^{-d(1-\varepsilon)\tau}$$

Поскольку в силу теоремы 2.2

$$(\varphi(x)\, u, \psi_\mu^i) - \int_0^{\tau/2} (u, \psi_\mu^i)_H\, dx \le C(\varepsilon)\, e^{-d(1-\varepsilon)\tau},$$

то отсюда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь самосопряженный оператор

$$\hat{L}(\varepsilon) = A(\tau) \frac{d}{d\tau} + B(\tau) + \varepsilon\, V(\tau, \varepsilon),$$

где $V(\tau,\varepsilon)$ ограниченный оператор в $H$ и непрерывный по $\tau$. Пусть $\mu$ - изолированная точка спектра оператора

$$\hat{L}(0) = A(\tau) \frac{d}{d\tau} + B(\tau),$$

а $d_\mu$ - расстояние от $\mu$ до остального спектра оператора $\hat{L}(0)$.

Пусть

$$\bar{V}(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} V(\tau,\varepsilon) & \text{при } \tau < 2\tau_\varepsilon \\ 0 & \text{при } \tau > 2\tau_\varepsilon \end{cases},$$

т.е.

$$\| \varepsilon\, \bar{V}(\tau,\varepsilon) \| \le \frac{d_\mu}{2+\alpha}, \ \alpha > 0 \ \text{ и пусть } \ \bar{\bar{V}} = V(\tau,\varepsilon) - \bar{V}(\tau,\varepsilon)$$

Тогда оператор $\hat{L}$ можно представить в виде

$$\hat{L} = A\frac{d}{d\tau} + B + \varepsilon\, v(\tau,\varepsilon) = A\frac{d}{d\tau} + B + \varepsilon\,\bar{v}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\bar{\bar{v}}(\tau,\varepsilon) =$$

$$= \hat{L}^{o} + \varepsilon\,\bar{\bar{v}}(\tau,\varepsilon).$$

Полагая в предыдущей лемме $\eta = 2\tau_\varepsilon$ ,
$v(\tau,\eta) = \varepsilon\,\bar{\bar{v}}(\tau,\varepsilon)$ , мы выведем в силу лемм об абстрактной теории возмущений следующую теорему.

Рассмотрим для этого пространство $C$ непрерывных функций от $\varepsilon$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ и отождествим те функции, разность между которыми не превосходит $\sigma(\varepsilon) = C\exp\{-d(1-\delta)\tau_\varepsilon\}$; полученное фактор пространство обозначим через $S$ . Рассмотрим пространство $L_2[H,S]$ функций из $L_2[H]$ со значениями в $S$ . Равенство $a = b$ в этом пространстве будем обозначать значком $a \underset{S}{=} b$

Предположим, что оператор

$$\hat{L}(0) = A(\tau)\frac{d}{d\tau} + B(\tau)$$

самосопряжен в $L_2[H]$ , а $B(\tau)$ коммутирует с $\tau$ . Оператор $\varepsilon\, v(\tau,\varepsilon)$ коммутирует с $\tau$ и стремится к нулю по норме $H$ при любом фиксированном $\tau$ .

Теорема 2.3

Пусть решение $\psi_\lambda$ уравнения

$$\left[\hat{L}(0) + \varepsilon\, v(\tau,\varepsilon)\right]\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

удовлетворяет условию

$$\int_{-x}^{x} \|\psi_\lambda\|_H^2\, d\tau \le C(\delta)\, e^{\delta x} \tag{7.1}$$

где $\delta$ - любое, а $C(\delta)$ - константа, не зависящая от $\varepsilon$ , а ближайшая к $\lambda$ точка спектра оператора $\hat{L}(0)$ есть собственное значение $\mu$ этого оператора конеч-

ной кратности $m$.

Тогда

I) Оператор

$$\left[\hat{L}^{0}+\varepsilon\bar{v}(\tau,\varepsilon)\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\left[\hat{L}^{0}-z\right]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\varepsilon^{k}\left[\bar{v}(\tau,\varepsilon)(\hat{L}^{0}-z)^{-1}\right]^{k}dz$$

где $\Gamma$ окружность с центром в точке $\mu$ радиуса $d/2$ имеет $\ell\leq m$ различных собственных значений $\mu_i=\mu_i(\varepsilon)$ $(i=1,2,..,\ell)$, а сумма проекционных операторов $P_i(\varepsilon)$ $i=1,2,\dots,\ell$ на собственные подпространства, отвечающие им, имеет размерность $m$.

2) Выполняется соотношение

$$\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon}\left\|\left(1-\sum_{i=1}^{\ell}P_i(\varepsilon)\right)\psi_\lambda\right\|_H^2 d\tau \underset{S}{=} 0$$

3) Найдется такое $0\leq i\leq\ell$, что будут выполняться соотношения

$$\operatorname{Min}\left(|\mu_i-\mu_{i+1}|,|\mu_i-\mu_{i-1}|\right)\sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon}\|(1-P_i)\psi_\lambda\|_H^2 d\tau} \underset{S}{=} 0$$

$$|\lambda-\mu_i(\varepsilon)|\sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon}\|\psi_\lambda\|_H^2 d\tau} \underset{S}{=} 0 .$$

Замечание I. Если ближайшими к точке $\lambda$ являются два собственных значения $\mu_1$ и $\mu_2$ оператора $\hat{L}(0)$, т.е. точка $\lambda$ находится посередине между $\mu_1$ и $\mu_2$, то $\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon}\|\psi_\lambda\|_H^2 d\tau \underset{S}{=} 0$

Замечание 2. Для действительных $\lambda$ только решения, удовлетворяющие условию (7.I), имеют физический смысл. Известно, что собственные функции непрерывного спектра широкого класса дифференциальных операторов с частными производными удовлетворяют этому условию.

Для дифференциального оператора второго порядка вида (3.0), удовлетворяющего условиям теоремы 2.I, будет справедлива предыдущая теорема, если положить

$6(\varepsilon) = exp\{-(1-\delta)\omega \tau_\varepsilon\}$, где $\omega$ определяется формулой (3.3).

Это утверждение доказывается аналогично предыдущей теореме.

Кроме того, аналогично можно рассматривать случай, когда $\alpha$ в формуле (3.I) зависит от $\xi$ (ср. замечание 2 § 2 ).

Это будет иметь место, например, для уравнения Шредингера когда потенциал на бесконечности стремится к $\infty$ и спектр чисто дискретный. Впрочем, в этом последнем случае можно использовать оценки, полученные в работе Тозио Като "Свойства роста решений приведенного волнового уравнения с переменным коэффициентом" (1959) (см. сб. Математика, 1961, 5, № I, II5–I35).

# ГЛАВА 3

## СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ I. Слабая сходимость решений. Рассмотрим следующую задачу: пусть $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность линейных операторов, действующих из $B_1$ в $B_2$ (где $B_1$ и $B_2$ – банаховы пространства) и имеющих одну и ту же область определения $D(\mathcal{A}_n) = D$

Рассмотрим последовательность уравнений

$$\mathcal{A}_n x_n = v_n \tag{I.I}$$

и предположим, что как последовательность операторов так и последовательность $\{v_n\}$ правых частей уравнений (I.I) сходятся, в том или ином смысле, к оператору $A$ и элементу $v$ соответственно. Рассмотрим, наряду с уравнениями предельное уравнение

$$A x = v \tag{I.2}$$

Спрашивается, какие условия должны быть наложены на последовательность операторных уравнений (I.I) для того, чтобы последовательность их решений $\{x_n\}$ сходилась (в том или ином смысле) к решению предельного уравнения (I.2)

Установим сперва условия, при которых имеет место слабая сходимость решений, а потом перейдем к условиям сильной сходимости. При рассмотрении слабой сходимости мы ограничимся случаем операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Теорема 3.I [54] Пусть $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность линейных операторов в гильбертовом пространстве $H$ , имеющих

одну и ту же область определения $D$, всюду плотную в $H$ и пусть $\{A_n\}$ сильно сходится к $A$, а $\{f_n\}$ - последовательность элементов из $H$, слабо сходящаяся к $f$. Если для последовательности уравнений

$$A_n^* x_n = f_n \tag{I.3}$$

существует ограниченная последовательность $\{x_n\}$ их решений, то существует такая последовательность $\{y_n\}$ решений предельного уравнения

$$A^* x = f. \tag{I.4}$$

что последовательность $\{x_n - y_n\}$ слабо сходится к нулю.

<u>Доказательство.</u> Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $v$ - предел этой подпоследовательности. Покажем, что $v$ - решение предельного уравнения (I.4). Действительно, для любого $g \in D$ имеем:

$$(Ag, x_{n_k}) = ([A - A_{n_k}]g, x_{n_k}) + (g, f_{n_k}) \to (g, f)$$

и, в то же время

$$(Ag, x_{n_k}) \longrightarrow (Ag, v),$$

откуда

$$(Ag, v) = (g, f) \tag{I.5}$$

для всех $g \in D$. Поскольку $D$ всюду плотно в $H$, то (I.5) означает, что

$$A^* v = f$$

Обозначим через $H_1$ подпространство всех решений однородного уравнения $A^* x = 0$, а через $H_2$ - его ортогональное дополнение, и пусть $P_1$ и $P_2$ - проекционные операторы, отвечающие этим подпространствам. Положим

$$z_n = P_2 (v - x_n) \tag{I.6}$$

и

$$y_n = z_n + x_n$$

Каждый из элементов $y_n$ будет решением уравнения (I.4); действительно:

$$A^* y_n = A^* (z_n + x_n) = A^* (P_2 v + P_1 x_n) =$$

$$= A^* P_2 v = A^* (P_1 + P_2) v = A^* v = f \tag{I.7}$$

Поэтому для завершения доказательства теоремы остается показать, что последовательность $\{ z_n \}$ слабо сходится к нулю. Эта последовательность ограничена, т.к.

$$\| z_n \| \leq \| x_n \| + \| v \| ,$$

а последовательность $\{ x_n \}$ ограничена по условию. Далее, т.к. $z_n \in H_2$, то для всех $x \in H_1$, имеем:

$$( z_n , x ) = 0 \tag{I.8}$$

Кроме того, если $g \in D$, то $Ag \in H$, поэтому

$$(Ag, z_n) = (Ag, y_n - x_n) = ([A_n - A]g, x_n) + (Ag, y_n) -$$
$$-(A_n g, x_n) = ([A_n - A]g, x_n) + (g, f - f_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty \qquad (I.9)$$

для всякого $g \in D$. Из (I.8) и (I.9) получаем, что соотношение

$(z_n, u) \to 0$ при $n \to \infty$ (I.10) выполнено для каждого $u \in H_1 \oplus R(A)$.

Но $R(A)$ всюду плотно в $H_2$, т.к. иначе в $H_2$ нашелся бы ненулевой элемент $y_0$, ортогональный $R(A)$, и мы имели бы для каждого $x \in D$.

$$0 = (y_0, Ax) = (A^* y_0, x)$$

откуда $A^* y_0 = 0$, т.е. $y_0 \in H_1$, что невозможно. Итак, соотношение (I.10) выполнено на множестве, замкнутая линейная оболочка которого есть всё $H$. Отсюда следует, что ограниченная последовательность $\{z_n\}$ действительно слабо сходится к нулю. Теорема доказана.

Замечание. Если оператор $A^{*-1}$ существует (т.е. ур-ие $A^* x = 0$ имеет лишь тривиальное решение), то утверждение теоремы 3.I можно сформулировать так: всякая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ решений уравнений (I.3) сходится к решению предельного уравнения (I.9) Более того, если $A^{*-1}$ существует, то теорема 3.I имеет место и для операторов, действующих из одного бана-

хова пространства в другое, поскольку единственный пункт проведенного выше доказательства, использующий гильбертовость пространства $H$ - это возможность представить его в виде суммы подпространств $H_1$ и $H_2$ .

Следствие I. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.I и, кроме того, $(x_n, y_n - x_n) \to 0$ Тогда

$$\| y_n - x_n \| \to 0$$

Действительно,

$$(y_n - x_n, y_n - x_n) \to (y_n, y_n - x_n) = (y_n, z_n) = (v, z_n) \to 0$$

поскольку $y_n - v \in H_1$ ортогонально $z_n$

Пример. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \Delta \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon + k^2(x,y) u_\varepsilon = F(x,y)$$

$$u_\varepsilon |_\Gamma = 0 , \quad k^2(x,y) \geq \alpha > 0 , \tag{I.II}$$

$\Delta$ - оператор Лапласа, $\Gamma$ - гладкий контур , $u_\varepsilon \in L_2[\Omega]$

$\Omega$ область, ограниченная $\Gamma$ .

Докажем, что $u_\varepsilon(x,y)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к $F(x,y) / k^2(x,y)$ в области $\Omega$ .

Очевидно, что сопряженный оператор $L_\varepsilon^*$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к оператору умножения на $k^2(x,y)$

Для применения теоремы 3.I остается доказать ограниченность $\| u_\varepsilon \|$ при $\varepsilon \to 0$ .

Умножим (I.II) на $(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon$ и проинтегрируем по $x, y$ в $\Omega$. Проинтегрировав по частям, получим

$$\varepsilon \iint\limits_{\Omega} [\nabla(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon]^2 dx\,dy + \iint\limits_{\Omega} k^2(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon^2 dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \mathcal{F} u_\varepsilon (1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon})\,dx\,dy \le \|\mathcal{F}(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon})\|\,\|u_\varepsilon\| \le C\|\mathcal{F}\|\,\|u_\varepsilon\|$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Omega} k^2 u_\varepsilon^2\,dx\,dy \le C\,\|\mathcal{F}\|\,\|u_\varepsilon\|,$$

значит

$$\|u_\varepsilon\| \le \frac{C}{\alpha}\|\mathcal{F}\|,$$

что и требовалось.

§ 2. Условия сильной сходимости решений. Перейдем теперь к установлению условий, при которых последовательность решений уравнений вида (I.I) сходится к решению предельного уравнения (I.2) не только слабо, но и сильно. Так как решение уравнения вида

$$Ax = f$$

– это обращение оператора $A$, то нам удобнее будет сформулировать и доказать соответствующий результат не в терминах уравнений, а в терминах обратных операторов. Здесь мы рассмотрим общий случай операторов, действующих из одного банаховского пространства в другое.

I° . Теорема о сильной сходимости решений.

Пусть $\{\mathcal{A}_n\}$ – последовательность линейных операторов, действующих из банахова пространства $B_1$ в банахово



6-1419

пространство $B_2$ и имеющих одну и ту же область определения $D$, и пусть $A$ - оператор, действующий из $B_1$ в $B_2$, имеющий ту же область определения $D$ и такой, что

$$Ag = \lim_{n\to\infty} A_n g \qquad \text{для всех} \quad g \in D$$

Операторы $\{A_n\}$ мы предположим допускающими замкнутые расширения. Замыкание (т.е. наименьшее замкнутое расширение) оператора $A_n$ обозначим $\bar{A}_n$. Справедлива следующая

Теорема 3.2 [51, 12)]

Пусть последовательность $\{A_n^{-1}\}$ существует и ограничена в совокупности:

$$\| A_n^{-1} \| \leq C$$

Тогда

1) Существует обратный оператор $A^{-1}$, ограниченный на множестве $\overline{R(A)}$, где $\overline{R(A)}$ - замыкание области определения оператора $A^{-1}$.

2) $$\overline{A}^{-1} f = \lim_{n\to\infty} A_n^{-1} f,$$

где $f \in \overline{R(A)}$

Доказательство x/. Для доказательства существования $A^{-1}$ достаточно доказать, что уравнение $A\varphi_0 = 0$ имеет единственное решение $\varphi_0 = 0$.

x/ Ср. гл. 5, § I [Теорема 5.I].

Итак, допустим, что $A\varphi_0 = 0$, где $\varphi_0 \in D(A)$

Оценим $\|\varphi_0\|$.

Имеем, в силу условия теоремы

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi_0 = A\varphi_0$$

следовательно, $\|A_n\varphi_0\| \leq \|A\varphi_0\| + \varepsilon = \varepsilon$

при $n > N_\varepsilon$.

Отсюда и в силу ограниченности $\{A_n^{-1}\}$

$$\|\varphi_0\| = \|A_n^{-1}A_n\varphi_0\| \leq \|A_n^{-1}\|\,\|A_n\varphi_0\| \leq \varepsilon C$$

Так как $\varepsilon$ - любое, то $\|\varphi_0\| = 0$ и $\varphi_0 = 0$.

2) Докажем сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{-1}f = A^{-1}f$ для $f \in R(A)$.

Мы имеем $A^{-1}f \in D(A) \subset D(A_n)$ $(f \in R(A))$.

Следовательно, $A_n A^{-1}f$ определен для всех $f \in R(A)$.

Построим последовательность

$$h_n = A_n(A_n^{-1} - A^{-1})f = f - A_n A^{-1}f$$

В силу того, что $A_n g \to Ag$ для $g = A^{-1}f \in D(A)$ получаем $\|h_n\| \to 0$ при $n \to \infty$

Для любого $f \in R(A)$ имеем

$$\|(A_n^{-1} - A^{-1})f\| = \|A_n^{-1}h_n\| \leq \|A_n^{-1}\|\,\|h_n\| \leq C\|h_n\| \to 0$$

что и доказывает сходимость $A_n^{-1}$ к $A^{-1}$ на $R(A)$.

Отсюда по теореме Банаха-Штейнгауза 2.1 $A_n^{-1}$ сходится к $\bar{A}^{-1}$ на $\overline{R(A)}$ и $\|A^{-1}\| \leq C$

$2^{0}$. Примеры.

Пример I.

Рассмотрим краевую задачу.

$$\hat{L}\,u = \varepsilon\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2(x)\,u = \mathcal{F}(x,t,\varepsilon) \qquad (x = x_1, x_2, x_3)$$

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad c^2(x) \geqslant \alpha > 0 \tag{2.I}$$

либо $u\big|_{\Gamma} = 0$ , либо $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^2\,dx < \infty$

и будем изучать поведение решения при $\varepsilon \to 0$ .

(К этому случаю сводится задача об асимптотическом поведении решения уравнения Клейна-Гордона-Фока при $t \to \infty$ В уравнении (2.I) для этого надо сделать замену $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ и положить $\mathcal{F}(x,t,\varepsilon) = \mathcal{F}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right)$

а. Чтобы понять, как может вести себя решение уравнения (2.I) при $\varepsilon \to 0$ , рассмотрим частный случай: обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon^2\,\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \mathcal{F}(t)$$

и начальные условия

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad\qquad u'\big|_{t=0} = 0$$

Если $\mathcal{F}(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, то его решение $u_\varepsilon(t)$ может быть представлено в виде

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \sin\frac{t-\tau}{\varepsilon}\,\mathcal{F}(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t \mathcal{F}(\tau)\,d\left(\cos\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(0)\cos\frac{t}{\varepsilon} - \int\limits_0^t \mathcal{F}'(\tau)\,\cos\frac{t-\tau}{\varepsilon}\,d\tau$$

следовательно, если $\mathcal{F}(0)=0$, а $\mathcal{F}'(t)\in L_2$, то сходимость $u_\varepsilon(t)$ к $\mathcal{F}(t)$ при $\varepsilon\to 0$ будет сильная в $L_2$, если же $\mathcal{F}(0)\neq 0$, то сходимость будет слабая.

б. Обратимся теперь к общему уравнению (2.I)

Рассмотрим его в пространстве $L_2$ функций от $x$ (либо в области, ограниченной $\Gamma$, если $u/_\Gamma=0$, либо, если $\|u\|^2=\int|u|^2dx<\infty$ во всем бесконечном пространстве)

Пусть $\hat{L}u = \mathcal{F}(x,t)$

Умножим (2.I) скалярно на $\frac{\partial u}{\partial t}$. Имеем

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Cu\|=\left(\mathcal{F}(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Проинтегрировав по $t$, получим, в силу условий

$$u|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\qquad \|\nabla u\|\Big|_{t=0}=0,$$

что

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2+\|Cu\|^2\right)=\int_0^t\left(\mathcal{F}(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt$$

Проинтегрировав еще раз по $t$ от нуля до I получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2dt+\frac{1}{2}\left[\int_0^1\|\nabla u\|^2dt+\int_0^1\|Cu\|^2dt=\right.$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^t \left(\mathcal{F}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}\right) dt \le \left| \int_0^1 (1-t)\left(\mathcal{F}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}\right) dt \right| \le$$

$$\le \sqrt{\int_0^1 \|\mathcal{F}(x,t)\|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 dt} \qquad (2.2)$$

следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 dt \le \int_0^1 \|\mathcal{F}(x,t)\|^2 dt,$$

а значит,

$$\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 dt$$

существует, если только $\int_0^1 \|\mathcal{F}(x,t)\|^2 dt$ существует.

Пусть существует $\int_0^1 \|\mathcal{F}(x,t)\|^2 dt$, т.е. $\mathcal{F}$ принадлежит банахову пространству $W$ с нормой

$$\|\mathcal{F}(x,t)\|_W = \sqrt{\int_0^1 \left(\left\|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right\|^2 + \|\mathcal{F}\|^2\right) dt}$$

Тогда, проинтегрировав $\int_0^1 dt \int_0^t \left(\mathcal{F}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}\right) dt$

по частям, получим из (2.I)

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 dt + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \|\nabla u\|^2 dt + \int_0^1 \|cu\|^2 dt\right) =$$

$$= \int_0^1 (\mathcal{F}(x,t), u) dt - \int_0^1 dt \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, u\right) dt \le$$

$$\le \sqrt{\int_0^1 \|\mathcal{F}(x,t)\|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 \left\|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right\|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt}$$

Отсюда

$$\int_0^1 \|u\|^2 dt \le \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \|cu\|^2 dt \le \frac{1}{\alpha}\sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt}\ \|\mathcal{F}\|_W$$

Следовательно, оператор $L_\varepsilon^{-1}$, действующий из $W$ в гильбертово пространство $L_2^1$ функций от $x, t$ с нормой

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt}$$

равномерно ограничен при $\varepsilon \to 0$

$$\|u_\varepsilon\| \le \frac{1}{\alpha}\|\mathcal{F}\|_W \tag{2.3}$$

Предельный оператор имеет вид

$$\hat{L}^0 v = -\Delta v + c^2(x) v = \mathcal{F}(x,t)$$

По теореме 3.3 $u_\varepsilon$ сильно сходится к $v$, если правая часть $\mathcal{F}(x,t)$ принадлежит $R(\hat{L}^0)$. Область $R(\hat{L}^0)$ состоит из дважды дифференцируемых по $t$, функций, обращающихся в нуль при $t=0$ вместе со своими первыми производными. Замыкание $R(\hat{L}^0)$ в пространстве $W$ сохраняет одно начальное условие

$$\mathcal{F}(x,0)=0 .$$

Таким образом в общем случае уравнения (2.I) так же как и в примере а), если правая часть принадлежит $R(\hat{L}^0)$ и обращается в нуль при $t=0$, то $\int_0^1 \|u_\varepsilon - v\|^2 dt$ сходится к нулю. Это можно доказать и в случае, когда правая часть зависит от $\varepsilon$ и сильно сходится в $W$ к некоторой функции $\mathcal{F}_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Предположим теперь, что правая часть $\mathcal{F}(x,t)\in W$, но $\mathcal{F}(x,0)\neq 0$. Докажем, что в этом случае для любой функции $\varphi(t)$ с интегрируемым на $[0,1]$ квадратом

$$\int_0^1 \| \varphi(t)(u_\varepsilon - v)\, dt \| \to 0$$

т.е. осуществляется смешанная сходимость - слабая по $t$ и сильная по $x$.

Для доказательства умножим ур-ие (2.1) на дважды дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, обращающуюся в нуль вместе со своей производной на концах отрезка $[0,1]$ и проинтегрируем его по $t$

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathcal{F}(x,t)\,dt = \varepsilon\int_0^1 \varphi(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt + \hat{L}^0\int_0^1 \varphi(t)\,u\,dt =$$

$$= \varepsilon\int_0^1 \varphi''(t)\,u\,dt + \hat{L}^0\int_0^1 \varphi(t)\,u\,dt \qquad (2.4)$$

Поскольку в силу (2.3)

$$\varepsilon\left\|\int_0^1 \varphi''(t)\,u\,dt\right\| \le \varepsilon\sqrt{\int_0^1(\varphi''(t))^2dt}\;\|u\|_{L_2'} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\alpha}\sqrt{\int_0^1(\varphi''(t))^2dt}\;\|\mathcal{F}\|_W \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, а оператор $\{L^0\}^{-1}$ существует и ограничен, как обратный к эллиптическому оператору $L^0$ (см. предыдущий пример), то из (2.4) вытекает равенство

$$\int_0^1 \varphi(t)\,u_\varepsilon\,dt - \{L^0\}^{-1}\int_0^1 \varphi(t)\,\mathcal{F}(x,t)\,dt = -\varepsilon\{L^0\}^{-1}\int_0^1 \varphi''(t)\,u_\varepsilon\,dt$$

Отсюда поскольку

$$\{L^\circ\}^{-1}\int_0^1 \varphi(t)\,\mathcal{F}(x,t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)\{L^\circ\}^{-1}\mathcal{F}(x,t)\,dt=\int_0^1 v\,\varphi(t)\,dt$$

имеем $\left\|\int_0^1\varphi(t)[u_\varepsilon - v]\,dt\right\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$

Поскольку множество $\{|u_\varepsilon - v|\}$ ограничены в $L_2$, то это соотношение будет выполнено по замыканию для всех $\varphi(t)$ с интегрируемым квадратом, что и требовалось.

3°. <u>Теорема Реллиха (новое доказательство).</u>

Сейчас мы укажем одно применение теоремы 3.2 к спектральной теории самосопряженных операторов, а именно получим из нее, с помощью элементарных рассуждений, следующую теорему Реллиха.[64], [65], [70]

<u>Теорема 3.3 (Реллих).</u> Пусть $\{A_n\}$ - последовательность самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$ и сходящихся к самосопряженному оператору $A$ в том смысле, что $A$ есть замыкание оператора $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Если $\{E_\lambda^{(n)}\}$ и $\{E_\lambda\}$ - спектральные семейства, отвечающие $A_n$ и $A$ соответственно, то $E_\lambda^{(n)}$ сильно сходятся при $n\to\infty$ к $E_\lambda$.

---

x/ $\mathcal{F}(x,t)$ должно быть достаточно гладким, чтобы $u(x,t)\in\mathcal{D}[-\Delta + c^2]$

в каждой точке $\lambda$ , не принадлежащей точечному спектру оператора A.

Доказательство элементарно в том случае, когда последовательность операторов $\{A_n\}$ равномерно ограничена по норме. Действительно, в этом случае можно, не ограничивая общности считать, что $\|A_n\| \le 1$

Для любого многочлена $P(t)$.

имеем:

$$P(A_n) \to P(A)$$

С помощью теоремы Вейерштрасса это соотношение переносится на любые функции, непрерывные на отрезке $[-1, 1]$

Возьмем, в частности функцию

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

Соответствующей функцией от оператора $A$ будет

$$E_0 A$$

Таким образом получаем:

$$E_0^{(n)} A_n \to E_0 A$$

Отсюда следует, что

$$E_0^{(n)} A \to E_0 A \tag{2.5}$$

Действительно, для любого $f \in H$ имеем:

$$\| E_0^{(n)} A f - E_0 A f \| \le \| E_0^{(n)} (A - A_n) f \| + \| E_0^{(n)} A_n f - E_0 A f \| \le$$

$$\le \| (A - A_n) f \| + \| E_0^{(n)} A_n f - E_0 A f \| \to 0$$

Если нуль не есть собственное значение оператора $A$, то $R(A)$ всюду плотно в $H$ и на $R(A)$ определен обратный оператор $A^{-1}$ (вообще говоря, неограниченный). Для всякого $f \in R(A)$ в силу (2.5) имеем:

$$E_0^{(n)} f = E_0^{(n)} A A^{-1} f \to E_0 f$$

так как $R(A)$ всюду плотна в $H$, то соотношение

$$E_0^{(n)} f \to E_0 f$$

выполняется для всех $f \in H$, т.е. $E_0^{(n)} \to E_0$. Если теперь $\lambda$ - произвольная точка, не являющаяся собственным значением оператора $A$, то достаточно те же рассуждения применить к оператору $(A-\lambda)$ и мы получим, что $E_\lambda^{(n)} \to E_\lambda$. [65] Таким образом, для равномерно ограниченной последовательности $\{A_n\}$ теорема доказана. Рассмотрим теперь общий случай. Из условия

$$A_n \to A \qquad \text{(на } \mathcal{D}\text{)}$$

следует, что

$$A_n \pm i \to A \pm i \qquad \text{(на } \mathcal{D}\text{)}$$

Операторы

$$[A_n + i]^{-1}$$

существуют и в равномерно ограничены (норма каждого из них $\leq 1$). В силу теоремы 3.3

$$[A_n + i]^{-1} \to [A + i]^{-1}$$

Аналогично

$$(A_n - i)^{-1} \to (A - i)^{-1}$$

И следовательно

$$\frac{1}{A_n + i} + \frac{1}{A_n - i} = \frac{2A_n}{A_n^2 + 1} \longrightarrow \frac{2A}{A^2 + 1}$$

т.к. проекционные операторы $E_0$ и $E_0^{(n)}$, отвечающие операторам $A_n$ и $A$, совпадают с соответствующими операторами, отвечающими

$$\frac{A}{A^2+1} \quad и \quad \frac{A_n}{A_n^2 + 1},$$

то общий случай теоремы Реллиха сводится, с помощью теоремы § 2 к уже рассмотренному частному случаю ограниченной последовательности операторов.

4°. Переход от дискретного спектра к непрерывному x/

В этом пункте мы будем рассматривать последовательность самосопряженных операторов $A_n$ с дискретным спектром с общей всюду плотной областью определения $\mathcal{D}$ в пространстве $L_2$, сходящихся к самосопряженному оператору $A$ с непрерывным спектром: $A$ есть замыкание оператора

---

x/ Этот пункт требует специальных знаний в области спектральной теории операторов и может быть выпущен при чтении. Достаточно прочесть приведенный здесь пример.

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ , определенного в $D$ . Обозначения: $g^{(\alpha)}(\alpha=1,\ldots)$ - порождающий базис для оператора $A$ , $E_\lambda$ и $E_\lambda^{(n)}$ - спектральные функции операторов $A$ и $A_n$ , $f$ - основная функция по Шварцу; $f^\alpha$ - проекция на подпространство, порождаемое векторами $E_\lambda g^{(\alpha)}$.

Предположим, что оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы Гельфанда и Костюченко и, следовательно, [22, 2] имеет обобщенные собственные функции - определенные как функционалы вида

$$\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \qquad (2.6)$$

<u>Теорема 3.4</u> [51, 13]

Предположим, что функционалы (2.6) непрерывно зависят от $\lambda$ , тогда существует бесконечное число последовательностей $\{\lambda_i^k\}$ собственных значений операторов $A_k$ , сходящихся к данному $\lambda$ , таких, что соответствующие им последовательности собственных функций, нормированных определенным образом, будут сходиться как функционалы на основных функциях к обобщенным собственным функциям оператора A.

Доказательство теоремы будет состоять из доказательства двух лемм. Предварительно введем определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $\int (f_n - f)^2 d\mu_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $f_n$ сходится к $f$ в среднем с переменной мерой $\mu_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если для любых $\delta$ и $\varepsilon$ найдется $N_{\varepsilon,\delta}$ такое, что для всех $n > N_{\varepsilon,\delta}$ переменная мера $\mu_n$ множества, на котором $|f_n - f| > \delta$ будет меньше $\varepsilon$, то $f_n$ сходится к $f$ по переменной мере $\mu_n$.

Лемма 3.1а Пусть $f_n$ сходится в среднем с переменной мерой $\mu_n$ к $f$: $\int \{f - f_n\} d\mu_n \to 0$, тогда $f_n$ сходится к $f$ по переменной мере $\mu_n$.

Нам нужно доказать, что для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется $N_{\varepsilon\delta}$, такое, что при каждом $n \geq N_{\varepsilon\delta}$ переменная мера $\mu_n$ множества, на котором $|f_n - f| \geq \delta$ будет меньше $\varepsilon$.

Предположим, что это утверждение неверно, т.е. предположим, что существуют такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ и такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что $|f_{n_k} - f|$ будет оставаться больше $\delta$ на некоторой последовательности множеств $S_{n_k}$, меры которых $\mu_{n_k}$ остаются больше $\varepsilon$.

Это приводит к неравенству

$$\int \{f - f_{n_k}\}^2 d\mu_{n_k} \geq \int_{S_{n_k}} \{f - f_{n_k}\}^2 d\mu_n \geq \varepsilon\delta^2$$

Оно противоречиво, поскольку его левая часть стремится по условию к нулю при $n \to \infty$.

Лемма доказана.

Если $\mu_n(\Delta) \to \mu(\Delta)$ ($\mu_n(\Delta)$ - меры интервала

$\Delta$ для всех $\Delta$, $\mu$ - мера Лебега, $f(x)$ - непрерывная функция, то из леммы вытекает, что для всякого $x_0$ существует бесконечное множество последовательностей точек роста монотонной функции $\mu_n(-\infty, x)$, $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, для которых $f_n(x_n) \to f(x_0)$. В самом деле, пусть заданы $\delta, \Delta$ и целое число $p$. По лемме можно выбрать $N_{\Delta\delta}$ таким, что при $n > N_{\Delta,\delta}$ число точек роста монотонной функции $\mu_n(-\infty,x)$, находящихся в интервале $\{x_0-\Delta, x_0+\Delta\}$ и удовлетворяющих условию

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \delta \tag{2.7}$$

будет больше $p$. Выберем $\Delta$ таким, чтобы $|f(x_0-\Delta) - f(x_0+\Delta)|$ было бы меньшее $\delta$. Тогда в условии (2.7) можно заменить $f(x_n)$ на $f(x_0)$, а $\delta$ на $2\delta$.

<u>Лемма 3.1.</u> Пусть обобщенные собственные функции оператора A, понимаемые в смысле Гельфанда и Костюченко /22,2/

$$\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \tag{1}$$

непрерывно зависят от $\lambda$.

Тогда обобщенные собственные функции операторов $A_n$ сходятся в среднем по переменной спектральной мере к обобщенной собственной функции оператора A.

Доказательство:

Рассмотрим выражение

$$\int\left\{\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}-\frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}\right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})=$$

$$=\int\left\{\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}\right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})-$$

$$-2\int\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}\, d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})+$$

$$+\int\left\{\frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}\right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}) \tag{2.8}$$

Первые два члена в правой части равенства (2.8) стремятся соответственно к $(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$ и $2(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$ в силу того, что $\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}$ непрерывно зависит от $\lambda$ по условию, а $E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)} \to E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}$ по теореме Реллиха

Остается доказать, что последний член сходится к $(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ .

По определению $f^{(\alpha)}$ и $g^{(\alpha)}$ при $N > N_\varepsilon$ найдутся такие $\Delta_i > 0$ , что

$$\left\| f^{(\alpha)} - \sum_{i=1}^{N} C_i E_{\Delta_i} g^{(\alpha)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда, поскольку при $n > n_0$

$$\max_i \left\| E^{(n)}_{\Delta_i} g^{(\alpha)} - E_{\Delta_i} g^{(\alpha)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2N}$$

следует, что

$$\left\| f^{(\alpha)} - \sum_{i=1}^{N} C_i E^{(n)}_{\Delta_i} g^{(\alpha)} \right\| \leq \varepsilon$$

Последний член в (2.8) есть квадрат проекции $f^{(\alpha)}$ на подпространство, порождаемое векторами вида $E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}$ при всех $\lambda$.

Следовательно,

$$\left| (f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)}) - \int \left\{ \frac{d(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \right\}^2 d\left(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}\right) \right| =$$

$$= \left| \left(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)} - \int \frac{d(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \, d\, E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}\right) \right| \leq$$

$$\leq \| f^{(\alpha)} \| \left\| f^{(\alpha)} - \int \frac{d(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \, d\, E^{(n)}_{\lambda} g^{(\alpha)} \right\| \leq$$

$$\leq \| f^{(\alpha)} \| \left\| f^{(\alpha)} - \sum C_i E^{(n)}_{\Delta_i} g^{(\alpha)} \right\| \leq \varepsilon \| f^{(\alpha)} \|$$

Теорема доказана.

Отсюда $u$ из леммы следует, что, если спектр $A_n$ дискретный и условия теоремы I выполнены, то для каждой

обобщенной собственной функции оператора $A$, отвечающей данному $\lambda$, найдется бесконечно много последовательностей $\{\lambda_n\}$ собственных значений операторов $A_n$, сходящихся к $\lambda$, таких, что соответствующая им последовательности собственных функций, рассматриваемых как функционалы на $f^{(\alpha)}$, будет сходиться к этой обобщенной собственной функции.

Пример. [51, 82]

Рассмотрим уравнение Шредингера для частицы с одной степенью свободы и потенциальной энергией $u(x)$

$$\frac{h^2}{2m} y_n'' + (\lambda - u(x))\, y_n = 0 \tag{2.9}$$

Каждая из его собственных функций характеризует некоторое стационарное состояние частицы, отвечающей данному уровню энергии.

Мы будем рассматривать тот случай, когда $u(x)$ представляет собой потенциальную яму общего вида, т.е. предположим, что $u(x)$ непрерывна и имеет конечное число максимумов и минимумов и $u(-\infty) = u(\infty) = +\infty$

Отсюда следует, что для всех $\lambda$, за исключением конечного числа значений, отвечающих экстремумам $u(x)$ выражение $\lambda - u(x)$ имеет четное число простых нулей. Спектр дифференциального уравнения при указанных ограничениях на $u(x)$ является чисто точечным. Положив в уравнении $h=0$, мы получим вместо дифференциального оператора

$$\frac{h^2}{2m}\frac{d}{dx^2} - u(x)$$

оператор умножения на функцию $-u(x)$. Этот последний имеет непрерывный спектр, его собственные функции, соответствующие данному $\lambda$, суть $\delta$ - функции (и их линейные комбинации), сосредоточенные в тех точках, где $\lambda - u(x)$ обращаются в нуль. Число корней уравнения $u(x) - \lambda = 0$ есть кратность этого спектра в точке $\lambda$.

Пусть $\lambda_n^i$ - собственное значение уравнения такое, что функция $u(x) - \lambda_n^i$ имеет $2k$ нулей $x_1, \dots, x_{2k}$, а собственные функции уравнения (2.9) нормированы к единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_n|^2 dx = 1,$$

тогда $\lambda_n^i$ будет удовлетворять одному из уравнений:

$$\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} \sqrt{\lambda_n^i - u(x)}\, dx = \pi(n + \tfrac{1}{2}) + O(h)$$

$$j = 1, \dots, k \qquad (2.10)$$

причем собственная функция, соответствующая $\lambda_n^i$,

удовлетворяющему $i$ -му уравнению (2.10) и неудовлетворяющему ни одному другому уравнению (2.10) с точностью до $O(h)$, будет экспоненциально стремиться к нулю при $h \to 0$ вне отрезка $x_{2i-1} - \alpha \le x \le x_{2i} + \alpha$,

где $\alpha$ - сколь угодно малая, не зависящая от $h$ величина. Обозначим последовательность таких собственных значений через $\{\lambda_n^i\}$, а последовательность соответствующих им собственных функций через $\{y_{in}\}$. Обозначим подпоследовательность собственных значений последовательности $\{\lambda_n^i\}$, сходящуюся при $h \to 0$ к некоторому фиксированному числу $\lambda$, $\{\lambda^i_{n_\nu}\}$, а соответствующую им последовательность собственных функций через $\{y_{in_\nu}\}$. Нули функции $\lambda - u(x)$, между которыми лежит $i$-ый минимум функции $u(x)$, обозначим через $x_{2i-1}$ и $x'_{2i}$.

Предположим, что собственные функции уравнения (2.9) нормированы к $1/\sqrt{h}$, т.е. выбраны так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_n|^2 dx = \frac{1}{h}$$

Тогда последовательность собственных функций в пределе для четных $n_k$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \lambda^i_{n_k} \to \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} y_{in_k} \varphi(x)\, dx = \frac{\varphi(x'_{2i-1})}{\sqrt{u'(x'_{2i-1})}} - \frac{\varphi(x'_{2i})}{\sqrt{u'(x'_{2i})}},$$

а для нечетных $n_k$ удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \lambda^i_{n_k}\to\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_{in_k}\, \varphi(x)\, dx = \frac{\varphi(x'_{2i-1})}{\sqrt{u'(x'_{2i-1})}} + \frac{\varphi(x'_{2i})}{\sqrt{u'(x'_{2i})}} ,$$

где $\varphi(x)$ - любая функция, интегрируемая на всей прямой, с непрерывной первой производной.

Таким образом, получается следующая картина поведения собственных функций и собственных значений оператора (2.9) при $h\to 0$ .

Все собственные функции и соответствующие им собственные значения могут быть классифицированы по отдельным минимумам ("впадинам") потенциальной энергии $u(x)$ (так как каждая собственная функция стремится к нулю вне одной из этих впадин), а внутри каждой впадины собственные функции можно разбить на два класса: к одному отнести собственные и собственные значения с нечётным $n$ , приводящие при $h\to 0$ к образованию суммы $\delta$ - функций, взятых в точках поворота; к другому - с чётным $n$ , приводящие к образованию разности $\delta$ - функций. Такое расщепление собственных функций на различные классы и объясняет то, каким образом простой спектр оператора (3) в пределе переходит в кратный спектр оператора умножения на $u(x)$ .

Высказанные в этом примере утверждения можно легко проверить, если воспользоваться асимптотикой собственных

функций одномерного уравнения Шредингера данной в части 2. Этот пример показывает, что приведенная выше теорема не может быть улучшена в некотором смысле. Именно, нельзя ожидать, что в общем случае любая последовательность собственных функций, определенным образом нормированная, будет сходиться в обобщенном смысле к обобщенной собственной функции предельного оператора. Поэтому можно говорить лишь о том, что найдутся подпоследовательности сходящиеся в обобщенном смысле к данной обобщенной собственной функции предельного оператора.

5°. Регуляризация по Тихонову для некоторых некорректных задач.

I. Весьма широкий класс задач на решение операторного уравнения

$$Tz = u ,$$

где $T$ отображает топологическую группу $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ не является корректным, в том смысле что, если $u_n \to u$ в $\mathcal{H}_1$ , то решения $z_n$ уравнений

$$Tz_n = u_n$$

не сходятся в $\mathcal{H}_2$ к $z$ .

Введенное А.Н.Тихоновым понятие корректности позволило М.М.Лаврентьеву разработать ряд методов решения "корректных" по Тихонову задач, которые изложены в его известной монографии / 42 /. А.Н.Тихонов ввел общее понятие регуляризуемости некорректных задач и доказал регуляризуемость для

широкого класса задач в том числе и для нелинейных интегральных уравнений. Специальные методы регуляризации А.Н.Тихонова оказались, кроме того, весьма эффективным для решения конкретных задач на вычислительной машине.

Регуляризация в некорректных задачах заключается в том, что неограниченный обратный оператор $R = T^{-1}$ заменяется последовательностью ограниченных. Мы приведем в качестве примера доказательство следующего предложения, относящееся к регуляризации „нулевого порядка" по А.Н.Тихонову /77,1),2)/.

<u>Теорема 3.5</u>

Пусть $R$ замкнутое линейное преобразование с областью определения $D(R)$ плотной в гильбертовом пространстве [illegible] $H$.

Тогда задача $Ru=z$ $z \in H$ регуляризуема по Тихонову, а оператор

$$R_\delta = \overline{[1+\delta R R^*]^{-1} R}$$

(черта означает замыкание) является регуляризирующим. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, z)$ такое, что из неравенства $\| u - \tilde{u} \| < \delta$ при $\delta < \delta(\varepsilon, z)$ будет следовать неравенство $\| R_\delta \tilde{u} - z \| < \varepsilon$

Доказательство. Из поставленных условий следует, что существуют операторы $R^*$ и $R^{**}$, причем $R^{**} = R$, а

область определения $R^*$ плотна в $H$, а операторы

$$B_\delta = [1+\delta RR^*]^{-1} \quad \text{и} \quad C_\delta = \sqrt{\delta}\, R^*[1+\delta RR^*]$$

всюду определены и ограничены единицей, оператор $RR^*$ самосопряжен, положительно определен и имеет плотную область определения (см. § I гл. 2). Поскольку $1+\delta RR^* \to 1$ на $\mathcal{D}(RR^*)$, плотной в $H$, то из теоремы 3.2 следует, что $B_\delta$ сильно сходится к I на всех элементах $H$

Очевидно, что $R_\delta = \delta^{-1/2} C_\delta^*$, поэтому

$$\| R_\delta \| = \delta^{-1/2} \| C_\delta^* \| = \delta^{-1/2} \| C_\delta \| \le \delta^{-1/2}$$

Теперь перейдем к доказательству высказанного утверждения.

Пусть $\| u - \tilde{u} \| < \delta$ Нам надо доказать, что

$R_\delta \tilde{u} - z \to 0$ при $\delta \to 0$

Имеем

$$R_\delta \tilde{u} - z = R_\delta \tilde{u} - Ru = R_\delta \tilde{u} - R_\delta u + (R_\delta - R) u =$$
$$= R_\delta (\tilde{u} - u) + (B_\delta - 1) z.$$

Отсюда

$$\| R_\delta \tilde{u} - z \| \le \| R_\delta \| \| \tilde{u} - u \| + \| (B_\delta - 1) z \| \le \sqrt{\delta} + \| (B_\delta - 1) z \| \to 0, \tag{2.II}$$

поскольку $\| R_\delta \| \le \delta^{-1/2} \| C_\delta^* \| \le \delta^{-1/2}$

Теорема доказана.

2. Следствие.

Пусть $z \in D(R^*)$, т.е. $u \in D(R^*R)$, тогда $\|R_\delta \tilde{u} - z\| \leq \sqrt{\delta}$

Действительно,

$$\|[B_\delta - 1]z\| = \|\{[1+\delta R R^*]^{-1} - 1\}z\| = \delta \left\| \left( \frac{\overline{RR^*}}{1+\delta RR^*} \right) z \right\| =$$

$$= \delta \left\| \overline{\frac{1}{1+\delta RR^*}} RR^* z \right\| = \delta \| R_\delta R^* z\| \leq \sqrt{\delta} \|R^* z\|$$

Отсюда и из (2.II) вытекает утверждение следствия.

Если $R = T^{-1}$, то мы имеем

$$R_\delta = \overline{[1+\delta T^{-1}[T^*]^{-1}]^{-1} T^{-1}} = \overline{[(T^* T)^{-1}(T^* T + \delta)]^{-1} T^{-1}} =$$

$$= \overline{(T^* T + \delta)^{-1} T^*}$$

Полагая, что $\tilde{u} \in D(T^*)$, мы получим x/ для определения $z_\delta$ уравнение

$$(\delta + T^* T) z_\delta = T^* \tilde{u}$$

---

x/ В противном случае можно взять $\tilde{\tilde{u}} \in D(T^*)$ и такое, что $\|\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}\| = \delta^2$

Замечание.

Если оператор $R$ удовлетворяет условию

$$\left\| \frac{1}{1-\delta R} \right\| \leq a$$

при $|\delta| \to 0$ по некоторой кривой в комплексной плоскости $\delta$, то полагая

$$R_\delta = R \frac{}{1 - \frac{\delta}{|\delta|^{1/2}} R},$$

мы получим все результаты предыдущей теоремы. При этом если $z \in D(R)$, т.е. $u \in D(R^2)$, то

$$\| z - R_\delta \tilde{u} \| \leq \sqrt{|\delta|}$$

Если $R = T^{-1}$, то

$$R_\delta = T^{-1} \frac{}{1 - \frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}} T^{-1}} = \frac{1}{T - \frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}}.$$

Таким образом, $z_\delta$ находится из уравнения

$$T - \frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}} z_\delta = \tilde{u}$$

Этот последний способ регуляризации есть частный случай "специальной" регуляризации А.Н.Тихонова (т.н. "регуляризация нулевого порядка").

## § 3. Ряды теорий возмущений для обратного оператора.

Докажем теперь теорему относительно разложения в ряд теории возмущений обратного оператора.

Теорема 3.6. Пусть линейные операторы $A$ и $B$ из банахова пространства $B$ в банахово пространство $B'$ удовлетворяют следующим условиям. I) Замыкание $A+\varepsilon B$ существует; 2) область $D(A+\varepsilon B)$ плотна в $B$

3) $A = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{(A+\varepsilon B)}$

4) оператор $[\overline{A+\varepsilon B}]^{-1}$ ограничен равномерно при $\varepsilon \to 0$

5) существуют элементы

$$A^{-1}(BA^{-1})^{k} f \qquad k=1,2,\dots,n \tag{3.I}$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\left\| [\overline{A+\varepsilon B}]^{-1} f - A^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \varepsilon^{k} (BA^{-1})^{k} f \right\| = o(\varepsilon^{n})$$

Доказательство.

Заметим вначале, что поскольку $n$ элементов вида (3.I) существуют, то $(n-1)$ первых элементов принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, а, следовательно, и $D(A+\varepsilon B) \subset D(\overline{A+\varepsilon B})$

Докажем тождество

$$(\overline{A+\varepsilon B})^{-1} f = A^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^{k} (BA^{-1})^{k} f + (\overline{A+\varepsilon B})^{-1} (-\varepsilon)^{n} (BA^{-1})^{n} f$$

Действительно, подействовав на обе его части оператором $\overline{A+\varepsilon B}$ (это возможно в силу сделанного выше замечания), получим

$$f=\sum_{k=0}^{n-1}(-\varepsilon)^k(BA^{-1})^k f+\varepsilon BA^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-\varepsilon)^k(BA^{-1})^k f+$$

$$+(-\varepsilon)^n(BA^{-1})^n f\equiv f$$

Поскольку оператор $(\overline{A+\varepsilon B})^{-1}$ существует и ограничен, то тем самым тождество доказано.

Имеем

$$\|(A+\varepsilon B)^{-1}f-A^{-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varepsilon^k(BA^{-1})^k f\|=$$

$$=\varepsilon^n\|\{(A+\varepsilon B)^{-1}-A^{-1}\}(BA^{-1})^n f\|$$

По предположению

$$A^{-1}(BA^{-1})^n f$$

существует, т.е.

$$(BA^{-1})^n f\in R(A)$$

Следовательно в силу теоремы 3.2

$$\|\{[\overline{A+\varepsilon B}]^{-1}+A^{-1}\}(BA^{-1})^n f\|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$

Отсюда следует утверждение теоремы.

# ГЛАВА 4

# ВОЗМУЩЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ.

## § I. Введение.

I. В этой главе мы будем рассматривать однопараметрические полугруппы операторов

$$T_t \qquad 0 \le t < \infty ,$$

определенные в некотором банаховом пространстве $B$ и удовлетворяющие следующим условиям:

I) ограниченность:

$$\| T_t \| \le K \qquad \text{при} \quad 0 \le t \le s$$

(постоянная $K$ зависит, вообще говоря, от $s$ );

2) сильная непрерывность, т.е.

$$\| T_{t+\varepsilon} - T_t \| \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

для всех $t$ , включая $t = 0$.

При этих условиях предел

$$A = \lim \frac{1}{\varepsilon} ( T_\varepsilon - I )$$

(здесь $I$ - единичный оператор, а предел понимается в смысле сильной сходимости операторов) существует и представляет собой замкнутый оператор, имеющий всюду плотную в $B$ область

определения x/ . Он называется производящим оператором полугруппы $T_t$ .

Нас будет интересовать связь между сходимостью производящих операторов и сходимостью отвечающих этим операторам полугруппы. Для того, чтобы сама постановка такого вопроса имела определенный смысл нужно предварительно установить, что полугруппа $T_t$ однозначно восстанавливается по своему производящему оператору $A$ . Если оператор $A$ ограничен, то это непосредственно ясно т.к. тогда

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = e^{At} , \qquad (I.I)$$

где ряд сходится при всех $t$ . Если же оператор $A$ неограничен, то ряд (I.I) непосредственного смысла не имеет; тем не менее, полугруппа $T_t$ ограниченная и сильно непрерывная, восстанавливается по $A$ однозначно. Существует несколько явных формул, выражающих $T_t$ через $A$ , например,

$$T_t = \lim_{k\to\infty} \left(I - \frac{t}{k} A\right)^{-k}$$

или $T_t = \lim_{n\to\infty} e^{A_n t}$ , где $A_n$ ограничены коммутируют между собой и $\lim_{n\to\infty} A_n = A$

x/ См., напр., [65],[84].

Сводка такого рода формул имеется, например, в книге Э.Хилле и Р.Филлипса / 84 /, [28]. Обобщение этих формул дано в п. $2^{0}$ § 4.

Полугруппы операторов, действующих в банаховом пространстве, тесно связаны с дифференциальными уравнениями с операторными коэффициентами. Если $A$ - производящий оператор ограниченной сильно непрерывной полугруппы $T_t$ и $f_0 \in D(A)$, то функция

$$f(t) = T_t f_0$$

со значениями в $B$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{df}{dt} = Af$$

в том смысле, что

$$\left\| \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} - A f(t) \right\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Мы рассмотрим более общее уравнение вида

$$\frac{d\,u(t)}{dt} - A(t)\,u(t) = \mathcal{F}(t) \qquad 0 \le t \le a \tag{I.2}$$

где неизвестное $u(t)$ - элемент комплексного банахова пространства $B$, зависящий от действительного параметра $t$, $\mathcal{F}(t)$ - заданный элемент $B$, $A(t)$ - заданный, вообще говоря, неограниченный, зависящий от $t$, линейный оператор в $B$.

Если оператор $A(t)$ не зависит от $t$, а $\mathcal{F}=0$, то решение уравнения (4.2) формально дается формулой $e^{At}u(0)$, где $u(0)\in B$. Строгое определение и свойство такой экспаненты дается в теории полугрупп. В теории полугрупп найдены необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на инфинитизимальный оператор A с всюду плотной областью определения для того, чтобы полугруппа $T_t=e^{At}$ была сильно непрерывна. Нужно, чтобы существовали вещественные числа $\omega$ и $M$, такие, чтобы все $\lambda>\omega$ принадлежали бы резольвентному множеству оператора $A$ и

$$\|(A-\lambda)^{-n}\| \leq M(\lambda-\omega)^{n} \qquad n=1,2,\ldots \tag{I.3}$$

(см. / 28 / теорема Хилле - Филлипса-Иосида).

Мы обобщим это условие (как достаточное, но не необходимое!) на случай, когда оператор A зависит от $t$. В дальнейшем нам понадобится менее общее необходимое условие: если полугруппа $T_t=e^{At}$ ограничена единицей, то при всех положительных $\varepsilon$ оператор $(1-\varepsilon A)^{-1}$ определен всюду в $B$ и ограничен единицей.

§ 2. Основная оценка решений эволюционного уравнения.

Введем следующее определение.

Будем говорить, что оператор $A(t)$ в $B$ обладает свойством $P$, если выполнены следующие условия:

I) оператор $A$ замкнут и имеет плотную область определения $D(A(t))\subset B$

2) Существует число $\omega$, такое что все $\lambda > \omega$ принадлежат резольвентному множеству оператора $A(t)$

3) Функция $[A(t)-\lambda]^{-1}h$, где $\lambda > \omega$, $h \in B$, интегрируема по Бохнеру.

4) Существует положительное число $M$ такое, что для любого разбиения $s \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq 0$

$$\| [A(t_1)-\lambda]^{-1} [A(t_2)-\lambda]^{-1} \dots [A(t_n)-\lambda]^{-1} \|_B \leq M(\lambda-\omega)^{n}$$

<u>Лемма 4.I</u>

Пусть $A(t)$ обладает свойством $P$. Пусть $u(t)$ – некоторая непрерывная функция параметра $t$ со значениями в $D(A(t)) \subset B$ и такая, что функции $\frac{du}{dt}$ и $\mathcal{F}(t) = \frac{du}{dt} - A(t)u$ интегрируемы по Бохнеру.

Тогда имеет место неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u(t)\|_B \leq M e^{\omega_1 s} \left\{ \|u(0)\|_B + \int_0^s \|\mathcal{F}(t)\|_B \, dt \right\}, \quad (2.I)$$

где $\omega_1 > \omega$.

Следствие I. В предположениях леммы решение $u(t)$ уравнения (I.2) однозначно определяется начальным значением $u(0)$ и правой частью $\mathcal{F}(t)$.

В случае $\mathcal{F}(t) = 0$ и $M = 1$ эта теорема является следствием теоремы Т.Като / 34 D /. Метод, излагаемый ниже, отличается от метода Т.Като и примыкает к методам Иосида /65/ и Эллиота /89/. О теоремах единственности см. также /I6/, /44,I) /.

Доказательство I.

Введем следующие обозначения:

Обозначим через $C(B)$ пространство непрерывных функций, заданных на $[0 \leq t \leq S]$ со значениями в B.

Норму в этом пространстве введем следующим образом:

$$\varphi \in C(B) \quad \|\varphi(t)\|_{C(B)} = \underset{0 \leq t \leq S}{Max} \|\varphi(t)\|_B$$

$L_1(B)$ - банахово пространство абсолютно интегрируемых (интегрируемых по Бохнеру) функций, со значениями в B. Норму определим следующим образом:

$$f(t) \in L_1(B) \quad \|f(t)\|_{L_1(B)} = \int_0^S \|f(t)\|_B \, dt$$

Далее, обозначим через $L_1 \oplus B$ банахово пространство пар функций: $\{g, f\}$, где $g \in B$, $f(t) \in L_1(B)$ со следующей нормой:

$$\| \{g, f(t)\} \|_{L_1 \oplus B} = \|g\|_B + \int_0^S \|f(t)\|_B \, dt$$

Обозначим через $L$ оператор, который переводит элемент из $C(t, B)$ в элемент из $L \oplus B$ (будем обозначать это действие следующим образом: $L \in C(B) \to L_1(B) \oplus B)$.

Причем, если $u(t) \in D(L) \subset C(B)$,

то $Lu = \{ u(0), \frac{du}{dt} - A(t)u \}$.

Таким образом область определения оператора $L$ равна пересечению областей определения операторов

$$\frac{d}{dt} \in C(B) \to L_1(B) \quad и \quad A(t) \in C(B) \to L_1(B)$$

Введем следующие операторы

$$I_\delta(t) = (1-\delta A(t))^{-1} \qquad B_\delta(t) = A(t)\, I_\delta(t)$$

Оператор $I_\delta(t)$ - ограничен. Действительно,

$$I_\delta(t) = \left[\frac{1}{\delta} - A(t)\right]^{-1} \frac{1}{\delta},$$

а так как $\| [\lambda - A(t)]^{-1} \| \le \frac{M}{\lambda - \omega}$, то

$$\| I_\delta \| \le \frac{M}{\delta(\frac{1}{\delta} - \omega)}.$$

Положим раз и навсегда $\delta \le \frac{1}{2\omega}$, тогда

$$\| I_\delta(t) \| \le 2M$$

Оператор $B_\delta(t)$ также ограничен, т.к.

$$B_\delta(t) = A(t)\, I_\delta(t) = A(t) \frac{1}{1-\delta A(t)} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1-\delta A(t)} - 1\right) =$$

$$= \frac{I_\delta(t)}{\delta} - \frac{1}{\delta}$$

Следовательно,

$$\| B_\delta(t) \| \le \frac{2M+1}{\delta}$$

Из теоремы 3.2 следует, что $I_\delta(t) \to 1$ при $\delta \to 0$ на $\overline{D(A(t))} \subset B$, а значит $B_\delta(t) \to A(t)$ на $D(A(t)) \subset B$

Обозначим, далее, через $L_\delta(t) \in C(B) \to L_1 \oplus B$ оператор, действующий следующим образом:

на $u(t) \subset D(\frac{d}{dt}) \subset C(B)$

$$\left(\frac{d}{dt} \in C(B) \to L_1(B)\right)$$

$$L_\delta(t)\, u(t) = \left\{ u(0),\ \frac{du}{dt} - B_\delta(t)\, u(t) \right\}$$

Докажем, что $L_\delta \to L$ в смысле нормы $L_1 \oplus B$ на $D(L) \subset C(B)$.

По определению:

$$L_\delta(t)\, u(t) = \left\{ u(0),\ \frac{du}{dt} - B_\delta(t)\, u \right\}$$

$$L(t)\, u(t) = \left\{ u(0),\ \frac{du}{dt} - A(t)\, u \right\} \qquad (2.2)$$

Вычитая одно равенство из другого и беря нормы, получим:

$$\| L_\delta u - L u \|_{L_1 \oplus B} = \| \{0, B_\delta u - A u\} \|_{L_1 \oplus B} = \int_0^S \| [B_\delta(t) - A(t)] u \|_B\, dt$$

Докажем, что этот интеграл стремится к 0 при $\delta \to 0$. Выражение, стоящее под интегралом как доказывалось выше стремится к нулю при $\delta \to 0$. Остается доказать (см. § I, гл. 2), что это выражение ограничено интегрируемой функцией. Но $A(t) - B_\delta(t) =$
$= [1 - I_\delta(t)]\, A(t)$,
и так как $\| I_\delta \| \le 2M$, то $\| 1 - I_\delta(t) \| \le 2M+1$ и, следовательно,

$$\| [1 - I_\delta(t)]\, A(t)\, u(t) \|_B \le (2M+1) \| A(t)\, u(t) \|_B$$

Поскольку $u(t) \in D(L) \subset D(A(t))$,
где $A(t) \in C(B) \to L_1(B)$, то $\| A(t)\, u(t) \|_B$ интегрируема. По теореме Осгуда можем утверждать, что

$$\int_0^s \|[A(t)-B_\delta(t)]\,u(t)\|_B\,dt \to 0$$

при $\delta \to 0$

Итак $L_\delta \to L$ в $L_1 \oplus B$ на $D(L)\subset C(B)$

Докажем, что операторы $L_\delta^{-1} \in L_1 \oplus B \to C(B)$ ограничены в совокупности, т.е.

$$\max_{0\le t\le s} \|u_\delta(t)\|_B \le C\{\|u(0)\|_B + \int_0^s \|\mathcal{F}(t)\|_B dt, \tag{2.3}$$

если $L_\delta u_\delta = \{u(0),\ \mathcal{F}(t)\}$

Это и будет означать, что $\|L_\delta^{-1}\| \le C$

Для доказательства (2.3) рассмотрим задачу:

$$\frac{du_\delta(t)}{dt} - B_\delta(t)\,u_\delta(t) = \mathcal{F}(t) \tag{2.4}$$

$$u_\delta(0) = u_0$$

Сделаем замену $u_\delta = e^{-\frac{t}{\delta}} v$. Задача (2.4) перепишется в виде

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\delta}v - B_\delta(t)v = \mathcal{F}(t)e^{\frac{t}{\delta}}$$

$$v|_{t=0} = u_0$$

Учитывая, что $B_\delta(t) + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} I_\delta(t)$, будем

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\delta} I_\delta(t)\, v = \mathcal{F}(t)e^{\frac{t}{\delta}} \tag{2.5}$$

$$v|_{t=0} = u_0$$

Докажем, что решение этого уравнения можно записать в виде ряда:

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}\int_0^t I_\delta(t_1)dt_1\int_0^{t_1}I_\delta(t_2)dt_2\dots\int_0^{t_{n-1}}I_\delta(t_n)\,u_0\,dt_n+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}\int_0^t e^{\frac{\tau}{\delta}}d\tau\int_\tau^t I_\delta(t_1)dt_1\int_\tau^{t_1}I_\delta(t_2)dt_2\dots\int_\tau^{t_{n-1}}I_\delta(t_n)\mathcal{F}(\tau)dt_n$$

(2.6)

Нетрудно убедиться, что формальная подстановка (2.6) в (2.5) действительно обращает уравнение (2.5) в тождество. Остается доказать, что ряд (2.6) и ряд из производных от его членов по $t$ сходятся.

В силу условия 4)

$$\left\|\int_\tau^t I_\delta(t_1)dt_1\int_\tau^{t_1}I_\delta(t_2)dt_2\dots\int_\tau^{t_{n-1}}I_\delta(t_n)\,\mathcal{F}(\tau)dt_n\right\|_B\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M(t-\tau)^n}{[1-\delta\omega]^n n!}\;\|\mathcal{F}(\tau)\|_B \qquad (2.7)$$

Аналогично (2.7) имеем

$$\left\|\int_0^t I_\delta(t_1)dt_1\int_0^{t_1}I_\delta(t_2)dt_2\dots\int_0^{t_{n-1}}I_\delta(t_n)\,u_0\,dt_n\right\|_B\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Mt^n}{(1-\delta\omega)^n n!}\;\|u_0\|_B\,.$$

Отсюда следует, что ряд (2.6) сходится, причем

$$\|v\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \Big\{ \Big\| \int_0^t I_\delta(t_1)dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)\, dt_n\, u_0 \Big\|_B +$$

$$+ \int_0^t e^{\tau/\delta} d\tau \Big\| \int_\tau^t I_\delta(t_1)dt_1 \ldots \int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)\, \mathcal{F}(\tau)\, dt_n \Big\|_B \leq$$

$$\leq M \|u_0\|_B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\delta^n (1-\delta\omega)^n n!} + M \int_0^t e^{\tau/\delta} \|\mathcal{F}(\tau)\|_B\, d\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^n}{\delta^n (1-\delta\omega)^n n!}$$

$$= M e^{\frac{t}{\delta(1-\omega\delta)}} \Big\{ \|u_0\|_B \int_0^t e^{\tau/\delta\left(1-\frac{1}{1-\omega\delta}\right)} \|\mathcal{F}(\tau)\|_B\, d\tau \leq$$

$$\leq M e^{\frac{t}{\delta(1-\omega\delta)}} \Big\{ \|u_0\|_B + \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_B\, d\tau \Big\}.$$

Аналогично доказывается сходимость ряда из производных. Таким образом действительно ряд (2.6) удовлетворяет уравнению (2.5) Единственность этого решения следует из интегрального уравнения:

$$v(t) = u_0 + \int_0^t \mathcal{F}(\tau) e^{\tau/\delta} d\tau + \frac{1}{\delta} \int_0^t I_\delta(\tau)\, v(\tau) d\tau,$$

соответствующего (2.5) и доказывается методом сжатых отображений.

Теперь получим требуемую оценку для $u_\delta(t)$

Вспоминая, что $u_\delta(t) = e^{-t/\delta} v(t)$ можем записать:

$$\|u_\delta(t)\|_B = e^{-t/\delta}\|v(t)\|_B \le M e^{\left(\frac{1}{1-\delta\omega}-1\right)\frac{t}{\delta}}\Big\{\|u_0\|_B +$$

$$+\int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_B\, d\tau = M\, e^{\frac{1}{1-\delta\omega}t}\Big\{\|u_0\|_B + \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_B\, d\tau\Big\} \tag{2.8}$$

Возьмем $\omega_1 > \omega$. Тогда при всех достаточно малых $\delta$ $\omega_1 > \dfrac{\omega}{1-\delta\omega}$. Учитывая это, можем записать:

$$\|u_\delta(t)\|_B \le M e^{\omega_1 t}\Big\{\|u_0\|_B + \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau)\|_B\, d\tau\Big\} \le$$

$$\le M e^{\omega_1 s}\Big\{\|u_0\|_B + \int_0^s \|\mathcal{F}(t)\|_B\, dt\Big\}$$

Так как выражение, стоящее в правой части последнего неравенства от $t$ не зависит, то эта же оценка будет справедлива и для

$$\max_{0\le t\le s} \|u_\delta(t)\|_B$$

Итак, имеем оценку:

$$\max_{0\le t\le s} \|u_\delta(t)\|_B \le M e^{\omega_1 s}\Big\{\|u_0\|_B + \int_0^s \|\mathcal{F}(t)\|_B\, dt\Big\}$$

т.е. мы получили, что $\|L_\delta^{-1}\| \le M e^{\omega_1 s}$

Таким образом, операторы $L_\delta$ и $L$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3.2 об обратных операторах, на основании которой мы можем утверждать, что $\lim\limits_{\delta\to 0} L_\delta^{-1} = L^{-1}$

существует и ограничен той же величиной.

Итак, решение задачи

$$\frac{du}{dt} - A(t)\,u = \mathcal{F}(t) \qquad u(0) = u_0 ,$$

которая соответствует $L\,u = \{u_0, \mathcal{F}(t)\}$, единственно и имеет место оценка (2.I). Лемма доказана.

## § 3. Теория возмущений эволюционного уравнения.

### I$^0$. Абстрактная теорема.

Теорема 4.I. Пусть $A(t)$ $0 \le t \le t_0$ семейство операторов из банахова пространства $B$ в $B'$ с общей плотной в $B$ областью определения $D$.

Пусть

$$\| [ 1 - \varepsilon A(t) ]^{-1} \| \le 1 \tag{A}$$

для всех $t$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$. Рассмотрим последовательность таких семейств $A_n(t)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^t \| [A_n(t) - A(t)]\, g(t) \|\, dt \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.I}$$

на некотором плотном в $C(B)$ множестве $D_t$ дифференцируемых в $L_1(B)$ функций $g(t)$.

Тогда решение $u_n(t)$ уравнения

$$\frac{du_n}{dt} - A_n(t)\, u_n(t) = \mathcal{F}_n(t),$$

удовлетворяющее условию $u_n(0) = g_n$

где

$$g_n \to g \text{ в } B, \quad a \int_0^t \| \mathcal{F}_n(t) - \mathcal{F}(t) \|_B \, dt \to 0,$$

3.2)

сходится сильно в $B$ равномерно по $t$ к решению $u(t)$ задачи

$$L\, u(t) = \mathcal{F}(t) \qquad u(0) = g,$$

если таковое существует, где $L$ есть замыкание оператора $\frac{d}{dt} - A(t)$, заданного на множестве $D_t$.

Доказательство.

Рассмотрим операторы $L_n$ и $\tilde{L}$ из $C(B)$ в $L_1 \oplus B$ вида

$$L_n u_n(t) = \left\{ u_n(0), \frac{du_n(t)}{dt} - A_n(t)\, u_n(t) \right\}$$

$$\tilde{L}\, u(t) = \{ u(0), L\, u(t) \}$$

Из условия (3.I) следует, что последовательность $\{L_n\}$ сходится к оператору $\tilde{L}$.

Поскольку из леммы 4.I следует, что $\| L_n^{-1} \| \le 1$ то в силу теоремы 3.2 мы получаем утверждение.

2°. Пример из теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу

$$i \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t} - n^{1-\delta} t^n \Delta u_n(t,x) + c^2(x,t)\, u_n(t,x) = \mathcal{F}_n(t,x)$$

$$x = x_1, \ldots, x_n \qquad 0 \le t \le 1$$

$$c^2(x,t) \le 1$$

– непрерывная функция $\quad u_n(0) = 0, \quad \delta > 0$

$$\mathcal{F}_n(x,t) \in C(L_2).$$

Очевидно, что для дважды дифференцируемой по $x$ и I раз дифференцируемой по $t$ функции $v(x,t)$ имеет место

$$\int_0^1 \| n^{1-\delta} t^n \Delta v(t) \|_{L_2} dt \to 0$$

при $n \to \infty$

Кроме того,

оператор $n^{1-\delta} t^n \Delta$ удовлетворяет условию $(A)$

Все условия теоремы 4.I выполнены следовательно решение $u_n(t,x)$ сходится в среднем по $x$ и <u>равномерно</u> по $t$ при $0 \le t \le 1$ к функции

$$\int_0^t e^{-i\int_\tau^t C^2(x,\tau)d\tau} \mathcal{F}(x,\tau)\,d\tau,$$

где

$$\mathcal{F}(x,\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(x,\tau).$$

## § 4. <u>Теория возмущений полугрупп операторов.</u>

### I°. <u>Основная лемма.</u>

Пусть $A(t)$ однопараметрическое $(0 \le t \le S)$ семейство операторов из банахова пространства $B$ в себя с общей плотной в $B$ областью определения $D \subset B$.

Пусть $A(t)$ зависит от параметра $t$ непрерывно, т.е.

$$\lim_{t_1\to t_2} A(t)g = A(t_1)g$$

для всех $g \in D\,(A(t))$.

Пусть далее $\mathcal{F}(t)$ - некоторая интегрируемая по Бохнеру функция $t$ со значениями в $B$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} - A(t)u = \mathcal{F}(t) \tag{4.I}$$

От решения этого уравнения $u(t)$ потребуем, чтобы это была непрерывная функция $t$ со значениями в банаховом пространстве $B$, удовлетворяющая нулевому начальному условию

$$u(0) \in B \tag{4.2}$$

Иначе говоря мы рассмотрим оператор $L$ из банахова пространства $C(B)$ непрерывных функций $g(t)$ со значениями в $B$ в банахово пространство $V = L_1(B) \oplus B$ вида

$$L u(t) = \left\{ u(0),\ \frac{du}{dt} - A(t)u \right\} \in V$$

Классическим решением $u(t)$ мы будем называть функцию $u(t)$, принадлежащую пересечению $\frac{d}{dt} \cap D$ и удовлетворяющую уравнению (4.I) и начальному условию (4.2). Решением $u(t)$ уравнения (4.I) будем называть функцию $u(t)$, если существует последовательность $\{u_n(t)\}$ классических решений уравнений

$$\frac{du_n}{dt} - A(t)u_n = \mathcal{F}_n(t)$$

Сходящихся в $C(B)$ к $u(t)$, т.е.

$$\max_{0 \le t \le S} \| u(t) - u_n(t) \|_B \to 0$$

соответствующие правые части которых при этом сходятся в $L_1(B)$ начальные условия сходятся в $B$: $u_n(0) \to u(0)$

Будем говорить, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию $(P)$, если

I) $A(t_1)$ коммутирует с $A(t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in (0,S)$

2) Оператор $\frac{1}{1-\varepsilon A(t)}$ существует, ограничен единицей, и определен всюду.

Если $A(t)$ удовлетворяет условию $(P)$, то будем обозначать $A(t) \in P$.

Известно, что при этих условиях, если $u_0$ и $\mathcal{F}(t) \in \mathcal{D}$, то классическое решение уравнения (4.I) существует [34,1)].

Лемма 4.2. Пусть $A_n(t),\ A(t) \in (P)$,

$\mathcal{F}_n(t),\ \mathcal{F}(t) \in L_1(B),\quad g_n, g \in B$.

$\mathcal{D}$ - некоторая область плотная в $B$, и пусть выполняются соотношения:

$$\int_0^S \| \mathcal{F}_n(t) - \mathcal{F}(t) \|_B \, dt \to 0 \tag{4.3}$$

$$g_n \to g \tag{4.4}$$

$$\int_0^S \| [1-\varepsilon A_n(t)]^{-1} g - [1-\varepsilon A(t)]^{-1} g \|_B \, dt \to 0 \tag{4.5}$$

при $n \to \infty$ для всех $g \in B$ и при любом фиксированном $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, тогда последовательность решений

$u_n(t)$ задачи

$$\frac{du_n(t)}{dt} - A_n(t)\, u_n(t) = \mathcal{F}_n(t)$$

$$u_n(0) = g_n$$

сходится к решению $u(t)$ задачи

$$\frac{du(t)}{dt} - A(t)\, u(t) = \mathcal{F}(t)$$

$$u(0) = g$$

равномерно по $t$, т.е.

$$\max_{0 \le t \le s} \| u_n(t) - u(t) \|_B \to 0$$

при $n \to \infty$.

<u>Доказательство:</u>

Из условия леммы следует, что $I_{n\varepsilon}(t) = (1 - \varepsilon A_n(t))^{-1}$ сходится в $L_1(B)$ к $I_\varepsilon(t) = (1 - \varepsilon A(t))^{-1}$

Следовательно, и $B_{n\varepsilon} = A_n I_{n\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - I_{n\varepsilon})$ сходится к $B_\varepsilon = A I_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(1 - I_\varepsilon)$ на всех элементах $L_1(B)$ (т.е. сильно в $L_1(B)$).

Отсюда, поскольку $C(B) \subset L_1(B)$, следует, что операторы $L_\varepsilon^{(n)}$ из $C(B)$ в $V$ вида

$$L_\varepsilon^{(n)} u(t) = \left\{ u(0),\ \frac{du}{dt} - B_{n\varepsilon} u \right\}$$

сходятся к оператору $L_\varepsilon$ из $C(B)$ в $V$ вида

$$L_\varepsilon u(t) = \left\{ u(0),\ \frac{du}{dt} - B_\varepsilon u \right\}$$

на множестве дифференцируемых в $L_1(B)$ функций, принадлежащих $C(B)$ (т.е. непрерывных функций, производная от которых принадлежит $L_1(B)$) . Это и есть область определения оператора $L_\varepsilon$ в пространстве $C(B)$ . По формуле (2.I)

$$\left\| \left[ L_\varepsilon^{(n)} \right]^{-1} \right\| \leq 1$$

Следовательно, на области значений оператора $L_\varepsilon$ , которая совпадает с $V$ имеем в силу теоремы 3.2

$$\left[ L_\varepsilon^{(n)} \right]^{-1} \to L_\varepsilon^{-1}$$

при $n \to \infty$.

Иначе говоря, для $\delta > 0$ найдется $n_{\delta,\varphi}(\varepsilon)$ такое, что при $n > n_{\delta,\varphi}(\varepsilon)$ для любого элемента $\varphi \in V$ будет выполняться неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq S} \left\| L_\varepsilon^{-1}\varphi - L^{-1}\varphi \right\|_B \leq \delta \tag{4.6}$$

Кроме того, как уже доказывалось в лемме 4.I

$$\max_{0 \leq t \leq S} \left\| L_\varepsilon^{-1}\varphi - L^{-1}\varphi \right\|_B \leq \delta$$

при $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$ .

Как известно, множество двузначных функций фундаментально (т.е. линейная оболочка их плотна) в $L_1(B)$ /см.гл. 2, § I/

Пусть $\varphi = \{ f(t), g \}$

Пусть $f(t)$ - двузначная функция со значениями в $\mathcal{D}$

$$f(t) = \begin{cases} f_1 & \text{при } t < t_0 \\ f_2 & \text{при } t > t_0 \quad (f_1 \text{ и } f_2 \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

Рассмотрим оператор $L^{(n)} \in C(B) \to V$ вида

$L^{(n)} u(t) = \{ u(0), \frac{du}{dt} - A_n(t) u \} \in V$. Обозначим

$$[L_\varepsilon^{(n)}]^{-1} \{ g, f(t) \} - [L^{(n)}]^{-1} \{ g, f(t) \} = u_{n\varepsilon} - u_n$$

Отсюда следует, что $u_{n\varepsilon}$ и $u_n$ принадлежат

$$\mathcal{D}(\tfrac{d}{dt}) \cap \mathcal{D}(A_n(t)).$$

Имеем

$$L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) = \{ 0, \frac{du_{n\varepsilon}}{dt} - A_n(t) u_{n\varepsilon} - f - B_{n\varepsilon}(t) u_{n\varepsilon} +$$

$$+ B_{n\varepsilon}(t) u_{n\varepsilon} \} = \{ 0, [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] u_{n\varepsilon} \} =$$

$$= \{ 0, [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] \int_0^t \exp[(\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x) dx)] f(\tau) d\tau \} =$$

$$= \{ 0, \int_0^t e^{\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x) dx} [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) d\tau \}$$

Поэтому

$$\| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u) \| \leq \int_0^{t_0} \| e^{\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x)dx} [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t \| e^{\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x)dx} \|_B \, \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^S \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau,$$

поскольку в (2.I) в данном случае полагаем $M=1$, $\omega=0$

Следовательно,

$$\int_0^S \| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) \|_B dt \leq \int_0^S dt \int_0^S \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau =$$

$$= t_0 \int_0^S dt \, \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f_1 \|_B + (S - t_0) \int_0^S \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f_2 \|_B dt$$

$$\leq S \int_0^S \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A_n(t) f_1 \|_B dt +$$

$$+ S \int_0^S \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A_n(t) f_2 \|_B dt \tag{4.8}$$

Рассмотрим отдельно

$$\mathcal{J} = \int_0^S \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A_n(t) f \|_B dt,$$

где $f \in D$.

Имеем

$$\mathcal{J} = \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A_n(t) - A(t) + A(t)] f \|_B \, dt \le$$

$$\le \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A_n(t) - A(t)] f \|_B \, dt + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \|_B \, dt$$

Первый член правой части неравенства не превосходит

$$2 \int_0^s \| [A_n(t) - A(t)] f \|_B \, dt$$

и, следовательно, при $n > n_\delta$ может быть сделан меньше $\delta$ (т.к. $A_n(t) \to A(t)$ ).

Следовательно, при $n > n_\delta$

$$\mathcal{J} \le \delta + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \|_B \, dt$$

Оценим второй член.

Пусть $q(t)$ конечно значная функция, такая что

$$\int_0^s \| q(t) - A(t) f \|_B \, dt \le \delta$$

и пусть она принимая значание

$q_k$ $k = 1, 2, \ldots, k_\delta$ $q(t) = q_k$

при $t_k \le t \le t_{k+1}$.

Возьмем $z_k \in D$ такое, чтобы

$$\| z_k - q_k \| \le \delta$$

Положив $z_\delta(t) = z_k$ при $t_k \le t \le t_{k+1}$ , будем иметь

$$\int_0^{\check{}} \| \tau_\delta(t) - q(t) \| dt = \sum_{K=1}^{K_\delta} (\tau_K - q_K)(t_{K+1} - t_K) \le \delta \cdot S$$

Следовательно,

$$\int_0^S \| \tau_\delta(t) - A(t) f \| dt \le \delta (1+S) \tag{4.9}$$

Имеем

$$\mathcal{J} \le \delta + \int_0^S \| [ I_{n\varepsilon}(t) - 1 ] A(t) f \| dt \le$$

$$\le \int_0^S \| [ I_{n\varepsilon}(t) - 1 ] [ Af - \tau_\delta(t) ] dt +$$

$$+ \int_0^S \| ( I_{n\varepsilon}(t) - 1 ) \ \tau_\delta(t) \| dt + \delta \tag{4.10}$$

Заметим, что

$$[ I_{n\varepsilon}(t) - 1 ] \tau_\delta(t) = \{ I_{n\varepsilon}(t) - I_{n\varepsilon}(t)(1 - \varepsilon A_n(t)) \} \tau_\delta(t) =$$

$$= \varepsilon I_{n\varepsilon} A_n(t) \tau_\delta(t).$$

Следовательно,

$$\| [ I_{n\varepsilon}(t) - 1 ] \tau_\delta(t) \| \le \varepsilon \| A_n(t) \tau_\delta(t) \|$$

Отсюда в силу (4.10)

$$\mathcal{J} \le \delta + 2 \int_0^{\varepsilon} \| A(t) f - \tau_\delta(t) \| dt + \varepsilon \int_0^S \| A_n(t) \tau_\delta(t) \| dt \le$$

$$\leq \delta + 2\delta(1+S) + \varepsilon \int_0^S \| A_n(t)\, r_\delta(t) \| \, dt$$

Следовательно, при $n > n'_\delta$ и $\varepsilon \leq \varepsilon'_\delta = \dfrac{\delta}{2\int_0^S \| A(t)\, r_\delta(t) \| dt} \leq$

$$\leq \frac{\delta}{\int_0^S \| A_n(t)\, r_\delta(t) \| dt} \qquad J \leq 4\delta + 2\delta S$$

Отсюда следует в силу (4.8)

$$\int_0^S \| L^{(n)} (u_{n\varepsilon} - u_n) \| dt \leq 2S(4\delta + 2\delta\varepsilon) = 4\delta S(2+S)$$

Поскольку $\| [L^{(n)}]^{-1} \| \leq 1$, то при $n > n'_\delta$, $\varepsilon \leq \varepsilon'_\delta$

$$\max_{0 \leq t \leq S} \| u_{n\varepsilon} - u_n \| = \max_{0 \leq t \leq S} [L^{(n)}]^{-1} \{ L^{(n)} (u_{n\varepsilon} - u_n) \} \leq$$

$$\leq \int_0^S \| L^{(n)} (u_{n\varepsilon} - u_n) \| dt \leq 4\delta S(2+S)$$

т.е. при $n > n'_\delta$ и $\varepsilon \leq \varepsilon'_\delta$

$$\max_{0 \leq t \leq S} \| [ [L^{(n)}_\varepsilon]^{-1} - [L^{(n)}]^{-1} ] \{ f(t) \} \| \leq \delta \, const$$

Следовательно в силу (4.6) и (4.7) при $n > n'_\delta$ и $n > n_{\delta,\varphi}(\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 = \min\{ \varepsilon_\delta, \varepsilon'_\delta \}$

имеем

$$\max_{0\le t\le s} \| [(L^{(n)})^{-1} - L^{-1}] \{f(t), g\} \le \max_{0\le t\le s} \| [(L^{(n)})^{-1} - (L^{(n)}_{\varepsilon_0})^{-1}] f(t), g\} \|$$

$$+ \max_{0\le t\le s} \| \{ (L^{(n)}_{\varepsilon_0})^{-1} - L^{-1}_{\varepsilon_0} \} \{ f(t), g\} \| +$$

$$+ \max_{0\le t\le s} \| [ L^{-1}_{\varepsilon_0} - L^{-1} ] \{ f(t), g\} \| \le \delta \, const$$

Поскольку $\delta$ любое наперед заданное, то отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \max \| [(L^{(n)})^{-1} - L^{-1}] \{ f(t), g\} \| = 0 \tag{4.II}$$

для любой двузначной функции $f(t)$ со значениями в $D$. Поскольку $D$ плотно $B$, то для любой двузначной функции $g(t)$ со значениями в $B$ и $\varepsilon > 0$ найдется двузначная функция $f(t)$ со значениями в $D$, такая что

$$\int_0^s \| g(t) - f(t) \| \, dt \le \varepsilon$$

Следовательно, поскольку множество двузначных функций фундаментальное в $L_1(B)$, то и множество двузначных функций со

значениями $D$ фундаментально в $L_1(B)$.
Соотношение (4.II) будет очевидно иметь место на линейном многообразии натянутом на это множество, т.е. на некотором плотном в $L(B)$ множестве. Поскольку $\|(L^{(n)})^{-1}\| \le 1$ для всех $n$, то по теореме Банаха-Штейнгауза (см. гл.2 § I) соотношение (4.II) будет выполняться для всех

$$\mathcal{F}(t) \in L(B)$$

Пусть, наконец, $\{g_n, \mathcal{F}_n(t)\}$ последовательность, сходящаяся в $V$ к $\{g, \mathcal{F}(t)\}$

Имеем

$$\underset{0\le t\le s}{\mathrm{Max}} \|(L^{(n)})^{-1}\{g_n, \mathcal{F}_n(t)\} - (L^{(n)})^{-1}\{g, \mathcal{F}(t)\}\| \le$$

$$\le \int_0^s \|\mathcal{F}_n(t) - \mathcal{F}(t)\| dt + \|g_n - g\| \to 0$$

Отсюда и из (4.II) следует окончательно

$$\lim_{n\to\infty} \underset{0\le t\le s}{\mathrm{Max}} \|(\overline{L^{(n)}})^{-1}\{\mathcal{F}_n(t), g_n\} - (\overline{L\ \ })^{-1}\{\mathcal{F}(t), g\}\| = 0$$

Лемма доказана.

2$^{\circ}$. <u>Обобщение теоремы Хилле.</u>

<u>Теорема 4.2.</u> Пусть $T(t)$ - сильно непрерывная полугруппа, удовлетворяющая условию

$$\|T(t)\| \le 1 \tag{4.I2}$$

и $A$ – ее производящий оператор. Пусть, далее $\{A_n\}$ - последовательность операторов, сходящихся на общей плотной области определения $D$, причем $A = \lim A_n$ и тоже удовлетворяющих условию $P$. 2) Тогда $\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-n}$ при $n \to \infty$ сильно сходится к $T(t)$ на всем $B$.

Доказательство.

Рассмотрим элемент

$$u_n = \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-n} u_0 \qquad (u_0 \in D)$$

и составим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u_n$. Это будет уравнение в банаховом пространстве $B$.

вида $$\frac{d u_n}{dt} - \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n u_n = 0 \qquad u_n(0) = u_0 \quad (4.13)$$

В силу условия $P$ 2) оператор $\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1}$ существует на всем $B$ и ограничен единицей, поэтому из теоремы 3.2 следует, что

$$\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} \to 1$$

Поэтому для $g \in D$

$$\left\|\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n g - Ag\right\|_B \leq \left\|\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} (A_n - A) g\right\|_B +$$

$$+ \left\|\left\{\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} - 1\right\} Ag\right\|_B \leq \left\|(A_n - A) g\right\|_B +$$

$$+ \left\|\left\{\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} - 1\right\} Ag\right\|_B \to 0$$

при $n \to \infty$

Значит, оператор $\left(1-\frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n \to A$

Поскольку в силу (2.I) $\|e^{B_t t}\| \leqslant 1$, то (см. § I) $\|[1-\delta B_t]^{-1}\| \leqslant 1$, а значит

$$\left[1-\delta A_n\left(1-\frac{A_n t}{n}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left[1-\delta B_{t/n}\right]^{-1} \leqslant 1$$

Таким образом, условия леммы 4.2 для задачи (4.I3) выполнены. Отсюда следует, что решение $u_n(t)$ уравнения (4.I3) сходится к решению $u(t)$ задачи

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad u(0) = u_0 \ ,$$

что и требовалось.

Заметим, что в случае, когда операторы $A_n$ ограничены теорема 4.2 была доказана Хилле.[84]

3°. Сходимость производящих операторов и сходимость полугрупп.

Пусть $A_n$ сходятся к А, на плотной области $D$, а последовательность $\{(1-\varepsilon A_n)^{-1}\}$ ограничена I, определена всюду и сходится сильно к $(1-\varepsilon A)^{-1}$ для любого $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда $e^{A_n t}$ сходятся сильно к $e^{At}$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из леммы 4.2, если положить в лемме $A_n(t) = A_n$, $A(t) = A$, $\mathcal{F}(t) = 0$, $g_n = g$.

Из теоремы 4.3 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 4.4.** [51, 12)]

**Пусть**

$\{T_t^{(n)}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ и $\{T_t\}$ –

– сильно непрерывные полугруппы линейных операторов в с производящими операторами $A_n$ $(n=1,2,\ldots)$ и $A$. Если $\|T_t^{(n)}\| \le 1$, а $A$ – является замыканием оператора

$$\lim A_n\, (\mathcal{D}(\lim A_n) = \mathcal{D}(A_n)),$$

то $\{T_t^{(n)}\}$ сильно сходится к $T_t$ при $n\to\infty$, равномерно относительно $t$ в интервале $0\le t\le s$

Действительно, (см. гл. I § 2)

из $\|T_t^{(n)}\| \le 1$ следует, что $\|[1-\varepsilon A_n]^{-1}\| \le 1$

Поэтому из теоремы 3.2 следует, что $(1-\varepsilon A_n)^{-1} \to (1-\varepsilon A)^{-1}$ при всех $\varepsilon > 0$. Условия теоремы 4.3 выполнены. Утверждение доказано.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - h\,\Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 u = \mathcal{F}(x,y)$$

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad u\big|_{x^2+y^2=1} = 0 \qquad 0\le t\le 1 \tag{4.14}$$

в классе непрерывных функций от $t$ при $0\le t\le 1$ с интегрируемым по $x, y$ квадратом в области, ограниченной контуром $\Gamma$.

Обозначим

$$A_h(t)\,u = h\,\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} - c^2 u$$

$$Au = -c^2u + \frac{\partial u}{\partial x}$$

Операторы $\dfrac{1}{1 - A_h(t)}$ ограничены единицей (см. § 3 п. 2$^{\circ}$). Кроме того, как известно, решение задачи

$$u + h\varepsilon\Delta u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon c^2 u = \mathcal{F}(x, y)$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

при $h \to 0$ сходится к решению задачи

$$v + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon c^2 v = \mathcal{F}(x, y)$$

$$v|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Значит в силу теоремы 4.3 решение уравнения (4.14) сходится равномерно по $t$ и сильно в $L_2$ к решению уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 u = \mathcal{F};$$

$$u|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad u|_{t=0} = 0$$

# ГЛАВА 5. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ

## § I. Теорема о сходимости гомоморфизмов в топологических группах.

В начале напомним некоторые определения теории топологических групп. [61, 1]

Множество $G$ элементов называется группой, если в $G$ установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов $a, b$ из $G$ некоторый элемент $c$ из $G$, так что выполнены формулированные ниже условия I, 2, 3, называемые групповыми аксиомами. Операция эта по большей части называется умножением, и результат ее обозначается через $ab$, $c = ab$ (произведение $ab$ может зависеть от порядка сомножителей $a$ и $b$ : $ab$, вообще говоря, не равно $ba$).

I) Ассоциативность: для всяких трех элементов $a, b, c$ из $G$ выполнено соотношение $(ab)c = a(bc)$

2) в $G$ имеется левая единица, общая для всех элементов группы, т.е. такой элемент $e$, что $ea = a$ для всякого элемента $a$ из $G$.

3) Для всякого элемента $a$ из $G$ существует левый обратный элемент, т.е. такой элемент $a^{-1}$, что $a^{-1}a = e$

Если $A$ и $B$ - два подмножества группы $G$, то через $AB$ обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида $xy$, где $x \in A$, $y \in B$. Через $A^{-1}$ обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида $x^{-1}$,

где $x \in A$. При натуральном $m$ подмножество $A^{m+1}$ определим индуктивно, считая, что $A^1 = A$ и $A^{m+1} = A^m A$. Подмножество $A^{-m}$ определим, положив $A^{-m} = (A^{-1})^m$. Пользуясь установленными обозначениями, можно составить произведение произвольного числа подмножеств, возведенных в произвольные целые степени. В дальнейшем мы иногда не будем делать различия между множеством, содержащим один элемент, и самим этим элементом, поэтому для нас имеет теперь смысл обозначение $Ab$, где $A \subset G$, $b \in G$.

Отметим, что если $A$ не пусто, то

$$AG = GA = G$$

$$G^{-1} = G$$

$$Ae = eA = A$$

Множество $H$ элементов некоторой группы $G$ называется подгруппой или делителем группы $G$, если $H$ есть группа а силу того же закона перемножения, который имеет место в $G$.

Отображение $g$ группы $G$ в группу $G^*$ называется гомоморфным отображением или гомоморфизмом, если оно сохраняет операцию умножения, т.е. если

$$g(xy) = g(x)\,g(y)$$

для всяких двух элементов $x$ и $y$ из $G$. Множество $g^{-1}(e^*)$ всех элементов группы $G$, отображающихся в единицу $e^*$ группы $G^*$ при гомоморфизме $g$, называется ядром гомоморфизма $g$.

Множество $R$ элементов какого-либо рода называется топологическим пространством, если каждому множеству $M$ элементов пространства $R$ поставлено в соответствие множество $\bar{M}$ , называемое замыканием множества $M$ , так что выполнены следующие условия:

1) если $M$ содержит только один элемент $a$ , то $\bar{M}=M$, или, что то же, $\bar{a}=a$.

2) если $M$ и $N$ суть два множества элементов пространства $R$ ,то $\overline{M \cup N}=\bar{M} \cup \bar{N}$ т.е. замыкание суммы равно сумме замыканий;

3) $\bar{\bar{M}}=\bar{M}$ , т.е. дважды примененная операция замывания дает тот же результат, что и операция замыкания примененная один раз.

Множество $F$ элементов топологического пространства $R$ называется замкнутым, если $\bar{F}=F$. Множество $G$ элементов из $R$ называется открытым или областью, если $R \setminus G$ есть замкнутое множество.

Множество $G$ пространства $R$ называется всюду плотным, если $\bar{G}=R$

Система $\Sigma$ областей пространства $R$ называется базисом пространства $R$ , если всякая непустая область из $R$ может быть получена как сумма некоторого множества областей, входящих в $\Sigma$ . Базис $\Sigma$ пространства $R$ иначе называется полной системой окрестностей пространства $R$ , и каждая область системы $\Sigma$ - окрестностью всякой точки, содержащейся в этой области.

Система $\Sigma'$ окрестностей точки $a$ называется базисом в точке $a$ или полной системой окрестностей точки $a$, если для каждой области $G$, содержащей точку $a$, найдется такая окрестность $U \in \Sigma'$, что $U \subset G$. Задание полной системы окрестностей в пространстве $R$ дает возможность однозначно определить операцию замыкания в этом пространстве.

Отображение $f$ топологического пространства $R$ на топологическое пространство $R'$ называется гомеоморфным или топологическим, если оно 1) взаимно однозначно и 2) сохраняет операцию замыкания: $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$ для всякого $M \subset R$.

Легко видеть, что если отображение $f$ гомеоморфно, то обратное ему отображение $f^{-1}$ также гомеоморфно. Два топологических пространства $R$ и $R'$ называются гомеоморфными, если одно из них можно гомеоморфно отобразить на другое.

Отображение $g$ топологического пространства $R$ в топологическое пространство $R'$ называется непрерывным, если для всякого множества $M \subset R$ выполнено соотношение

$$g(\bar{M}) \subset \overline{g(M)}$$

Множество $G$ называется топологической группой, если:

1) $G$ есть группа

2) $G$ есть топологическое пространство

3) Групповые операции, имеющиеся в $G$, непрерывны в топологическом пространстве $G$. Более полно требование это формулируется так:

а) Если $a$ и $b$ суть два элемента множества $G$, то для всякой окрестности $W$ элемента $ab$ найдутся такие окрестности $U$ и $V$ элементов $a$ и $b$, что $UV \subset W$.

в) Если $a$ есть некоторый элемент множества $G$, то для всякой окрестности $V$ элемента $a^{-1}$ найдется такая окрестность $U$ элемента $a$, что $U^{-1} \subset V$.

Пусть $G$ - топологическая группа, $\Sigma^*$ - некоторая полная система окрестностей ее единицы $e$ и $M$ - некоторое множество, всюду плотное в $G$. Тогда совокупность $\Sigma$ всех множеств вида $Ux$, где $U \in \Sigma^*$, $x \in M$ есть полная система окрестностей пространства $G$, а система $\Sigma^*$ удовлетворяет следующему условию:

Для всякого множества $U$ системы $\Sigma^*$ найдется такое множество $V$ той же системы, что $VV^{-1} \subset U$.

Отображение $g$ топологической группы $G$ в топологическую группу $G^*$ называется гомоморфным, если: I) $g$ является гомоморфным отображением алгебраической группы $G$ в алгебраическую группу $G^*$ 2) $g$ является непрерывным отображением топологического пространства $G$ в топологическое пространство $G^*$. Гомомрфизм $g$ называется мономорфизмом, если он имеет своим ядром единицу.

Определение. Последовательность $\{g_n\}$ гомоморфных отображений топологической группы $\mathcal{H}_1$ в топологическую группу $\mathcal{H}_2$ называется предельно непрерывной, если для любой окрестности $\mathcal{E}$ единицы $e^*$ группы $\mathcal{H}_2$ найдутся такое число $n_\varepsilon$ и такая окрестность $\delta$ единицы $e$ груп-

ни $\mathcal{H}_1$, что при $n > n_\varepsilon$, $x \in \delta$

$$g_n x \in \varepsilon,$$

в частности, если $x_k \to e$, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} g_n x_k = e^*$$

<u>Теорема 5.I.</u>

Пусть $\{g_n\}$ – предельно-непрерывная последовательность мономорфных отображений топологической группы $\mathcal{H}_1$ в топологическую группу $\mathcal{H}_2$.

Обозначим $R = \bigcap_n g_n(\mathcal{H}_1)$. Пусть $D = \lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(R)$ существует x/

Тогда $\lim_{n\to\infty} g_n(\bar{D})$ существует и определяет гомоморфное отображение $g$ подгруппы $\bar{D} \subset \mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, такое, что

I) $\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x^*) \in g^{-1}(x^*)$ при $x^* \in R$,

2) если $a_k \in \mathcal{H}_1$, $x_i \in \bar{D}$

и $\lim_{k\to\infty} a_k x_i = e$, то $\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty \\ i\to\infty}} g_n(a_k)\, g(x_i) = e^*$

---

x/ Это означает, что существует $\lim g_n^{-1}(x^*)$, где $x^*$ – любой элемент из $R$.

Доказательство:

Обозначим через $T$ оператор, определенный на $R$ и такой, что $Tx^* = \lim\limits_{n\to\infty} g_n^{-1} x^*$. Оператор $T$ есть гомоморфизм алгебраической группы $R$. Действительно,

$$T(x_1^* x_2^*) = \lim g_n^{-1}(x_1^* x_2^*) = (\lim_{n\to\infty} g_n^{-1} x_1^*)(\lim_{n\to\infty} g_n^{-1} x_2^*) =$$

$$= Tx_1^* \, Tx_2^*$$

при $x_1^*, x_2^* \in R$ в силу непрерывности групповых операций $\mathcal{в}$ $\mathcal{H}_1$. Докажем, что ядро алгебраического гомоморфизма $T$ состоит из единицы. Действительно, пусть $Tx^* = e$ Значит, $\lim g_n^{-1}(x^*) = e$. При $\kappa > K(\delta[\varepsilon])$ $x_\kappa = g_\kappa^{-1}(x^*) \in \delta[\varepsilon]$ и при $n > N(\varepsilon, \delta[\varepsilon])$ $g_n(x_\kappa) \in \varepsilon$, а, значит, при $n > K, N$ $g_n(x_n) \in \varepsilon$, т.е. $x^* = g_n(x_n) \in \varepsilon$, следовательно $x^* = e^*$, ч.т.д.

Докажем, что при $x \in D$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = T^{-1}(x)$

Действительно, поскольку $T^{-1}x \in R$, то $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{-1}(T^{-1}(x)) = x$ Следовательно, при $\kappa > K(\delta[\varepsilon])$

$$y_\kappa = g_\kappa^{-1}(T^{-1}(x))x^{-1} = g_\kappa^{-1}(T^{-1}(x)[g_\kappa(x)]^{-1} \in \delta[\varepsilon] \text{ и при } n > N(\varepsilon, \delta[\varepsilon])$$

$g_n y_\kappa \in \varepsilon$. Значит, при $n > N, K$ $g_n y_n = T^{-1}(x)[g_n^{-1}(x)]^{-1} \in \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = T^{-1}(x)$, ч.т.д.

Докажем, что оператор $T^{-1}$ непрерывен. Пусть $\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$.

При $n > N[\varepsilon_1, \delta_1[\varepsilon_1]]$ $g_n x \in \varepsilon$, если $x \in \delta_1[\varepsilon_1]$

Кроме того, при $n > N_1[\varepsilon_1^{-1}, \delta[\varepsilon_1^{-1}], x]$ $T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1} \in \varepsilon_1^{-1}$

Следовательно, при $n > N, N_1$ $T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1} g_n(x) \in \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_1 \subset \varepsilon$.



10*-1419

Значит, при $x \in \delta_1[\varepsilon_1]$ имеем: $T^{-1}(x) \in \varepsilon$, что и требовалось. Обозначим через $g$ гомоморфизм из $\bar{D}$ в $\mathcal{H}_2$ и совпадающий с $T^{-1}$ на $D$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} g_n \bar{D} = g\bar{D}$$

Пусть $y \in \bar{D}$, $x \in D$, $x^{-1}y \in \delta$. Поскольку $g_n(yx^{-1}) = g_n(y)[g_n(x)]^{-1}$ и $g[yx^{-1}] = g(y)[g(x)]^{-1} = g(y)[T^{-1}(x)]^{-1}$ имеем

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} = g_n(yx^{-1})\, g_n(x)\,[T^{-1}(x)]^{-1}\, g(yx^{-1})]^{-1}$$

Пусть $\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$, $\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1} \subset \varepsilon_1^{-1}$

при $n > N[\varepsilon_1, \delta[\varepsilon_1]]$ $\delta \subset \delta[\varepsilon_1]$ имеем $g_n(yx^{-1}) \in \varepsilon_1$;

при $n > N_1(x_1, \varepsilon_2)$ имеем $g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1} \in \varepsilon_2$,

при $\delta \subset \delta[\varepsilon_2]$ имеем $g(yx^{-1}) \in \varepsilon_2$

Следовательно, при $n > N[\varepsilon_1, \delta(\varepsilon_1)]$, $N_1(x, \varepsilon_2)$ и $\delta[\delta[\varepsilon_1] \cap \delta[\varepsilon_2]$

получаем $g_n(y)[g(y)]^{-1} \in \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1} \subset \varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$

Таким образом, при $n > N(\varepsilon)$ выполняется включение

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} \in \varepsilon \quad ,$$ ч.т.д.

Докажем теперь утверждение 2.

Заметим во-первых, что из условия $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}} a_k x_i = e$

следует, что $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}} x_i^{-1} x_k = e$.

Действительно, пусть $\delta_1^{-1}\delta \subset \delta$. При $n > N(\delta_1)$, $k, k' > K(\delta_1)$ имеем $a_n x_k \in \delta_1$; $a_n x_{k'} \in \delta_1$. Отсюда

$(a_n x_k)^{-1} a_n x_{k'} \in \delta_1 \delta_1 \subset \delta$, т.е. при $k, k' > K(\delta_1)$ $x_k^{-1} x_{k'} \subset \delta$

а, значит,

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}} x_i^{-1} x_k = e$$

Пусть $x_i \in \bar{\mathcal{D}}$, $a_k \in \mathcal{H}_1$ и $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}} a_k x_i = e$. Имеем

$$g_n(a_k) g(x_m) = g_n(a_k x_i)[g_n(x_i)]^{-1} g(x_i)\, g(x_i^{-1} x_m)$$

При $k > K(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$, $i > I(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$, $n > N(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$

имеем $g_n(a_k x_i) \in \varepsilon_i$. При $n > N_1(\varepsilon_2, i)$

имеем $g_n(x_i)[g(x_i)]^{-1} \in \varepsilon_2$. Отсюда при $n > N = Max[N(\delta[\varepsilon_1]\varepsilon_1]$

$N_1(\varepsilon_2 i)]$, $k > K(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$, $m > M(\varepsilon_2)$

получаем

$$g_n(a_k) g(x_m) \in \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_2 \subset \varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon.$$

Таким образом, $N$, $K$ и $M$ не зависят друг от друга и зависят лишь от $\varepsilon$. Значит,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ k\to\infty}} g_n(a_k)\, g(x_m) = e^*$$

, что и требовалось.

Теорема доказана.

## § 2. Слабо предельная непрерывность.

### I°. Равномерная ограниченность слабо-непрерывной последовательности операторов.

Пусть $B$, $B'$ - банаховы пространства. Рассмотрим мно-

жество замкнутых операторов $\mathcal{T} = \{T_n\}$, отображающих $B$ на $B'$.

Будем обозначать знаком $\Rightarrow$ слабую сходимость.

<u>Определение.</u> Множество $\mathcal{T}$ называется слабо предельно непрерывным, если какова бы ни была последовательность $B \ni f_k \Rightarrow 0$ последовательность $T_{n_k} f_k \Rightarrow 0$

Здесь $n_k$ – произвольная последовательность индексов стремящаяся к $\infty$.

<u>Лемма 5.I.</u>

Если $\mathcal{T}$ слабо предельно непрерывно на рефлексивном пространстве $B$, то оно равномерно ограничено по норме.

<u>Доказательство.</u>

Доказательство проведем от противного.

Поскольку операторы $T_n$ заданы на всем $B$, то каждый из них ограничен (см. гл. 2 § I). Предположим, что не найдется такой константы $C$, что $\| T_n \| \leq C$ при всех $n$. Значит, из $\mathcal{T}$ можно выбрать подпоследовательность $\{T_m\}$ такую, что

$$\lim_{m \to \infty} \| T_m \| = \infty$$

Поскольку $\| T_m^* \| = \| T_m \|$, имеем также

$$\lim_{m \to \infty} \| T_m^* \| = \infty$$

Введем семейство непрерывных полуаддитивных функционалов на $B'^*$ следующим образом:

$$F_m(\varphi) = \| T_m^* \varphi \|$$

По предположению,

$$\sup_{\|\varphi\| \le 1} F_m(\varphi) = \| T_m^* \| \to \infty \qquad \text{при } m \to \infty \tag{2.I}$$

Если бы $\sup\limits_{1 \le m < \infty} F_m(\varphi)$ был меньше бесконечности при любом $\varphi$, то по известной теореме [15] $\sup\limits_{\|\varphi\| \le 1} F_m(\varphi)$ был бы ограничен (для всех $m$), что противоречит (2.I). Следовательно, найдется такое $\varphi_0 \in B'^*$, что

$$F_{m'}(\varphi_0) = \| T_{m'}^* \varphi_0 \| \to \infty$$

при $m' \to \infty$.

Здесь $F_{m'}$ – некоторая подпоследовательность последовательности $F_m$. Введем последовательность

$$f_{m'} = \frac{g_{m'}}{\| T_{m'}^* \varphi_0 \|^{3/2}},$$

где $g_{m'} \in B$ и таково, что $\| g_{m'} \| = \| T_{m'}^* \varphi_0 \|$,

а $(g_{m'}, T_{m'}^* \varphi_0) = \| g_{m'} \|^2$. Элемент, обладающий такими свойствами мы будем обозначать $g_{m'} = (T_{m'}^* \varphi_0)^*$.

Отсюда $\| f_{m'} \| = \| T_{m'}^* \varphi_0 \|^{-1/2} \to 0$

при $m' \to \infty$.

Так как из сильной сходимости последовательности элементов

$B$ к некоторому элементу, следует слабая сходимость к этому же элементу, то

$$f_{m'} \Rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m' \to \infty$$

Из слабой предельной непрерывности $\mathcal{T}$ следует

$$(\varphi_0, T_{m'} f_{m'}) \to 0 \quad \text{при} \quad m' \to \infty$$

С другой стороны,

$$(\varphi_0, T_{m'} f_{m'}) = (T_{m'}^* \varphi_0, f_{m'}) =$$

$$= (T_{m'}^* \varphi_0, g_{m'}) \frac{1}{\| T_m^* \varphi_0 \|^{3/2}} = \frac{\| T_{m'}^* \varphi_0 \|^2}{\| T_{m'}^* \varphi_0 \|^{3/2}} \to \infty$$

$$\text{при} \quad m' \to \infty$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

2°. <u>Необходимое и достаточное условие слабо-предельной непрерывности последовательности операторов.</u>

<u>Лемма 5.2.</u>

Для слабой предельной непрерывности $\mathcal{T}$ на рефлексивном банаховом пространстве $B$ необходима и достаточна компактность $\mathcal{T}^* = \{ T_n^* \}$ на каждом элементе $\varphi \in B'^*$. Если $\mathcal{T}$ слабо предельно непрерывна, то из слабой сходимости $\{ T_n^* \varphi \}$ следует сильная сходимость этой последовательности.

<u>Доказательство.</u>

I. <u>Необходимость.</u> Пусть $\mathcal{T}$ слабо предельно непрерывно. Тогда в силу леммы 5.I

$$\| T_n \| = \| T_n^* \| \leq C$$

при всех $n$. Значит множество $T_n^* \varphi$, где $\varphi \in B'^*$, ограничено в $B$.

Следовательно, (см. § I гл. 2) / оно слабо компактно. Выберем из этого множества слабо сходящуюся подпоследовательность: $T_{n'}^* \varphi \rightarrow g$. Поскольку $\|(T_{n'}^* \varphi)^*\| = \| T_{n'}^* \varphi \| \leq C \|\varphi\|$, то

множество $\{(T_{n'}^* \varphi)^*\}$ слабо компактно в $B$.

Пусть $\{(T_{n''}^* \varphi)^*\}$ - слабо сходящаяся подпоследовательность:

$$(T_{n''}^* \varphi)^* \Rightarrow h$$

Из слабой предельной непрерывности $\mathcal{T}$ и слабой сходимости $(T_{n''}^* \varphi)^*$ к $h$ следует

$$(\varphi, T_{n''} [T_{n''}^* \varphi]^* - T_{n''} h) \rightarrow 0 \qquad \text{при } n'' \rightarrow \infty$$

и по критерию Коши

$$(\varphi, T_{n''} [T_{n''}^* \varphi]^* - T_{n''_p} [T_{n''_p}^* \varphi]^*) \longrightarrow 0$$

при $n''_p > n'' \rightarrow \infty$.

Перебрасывая операторы $T_{n''}$, $T_{n''_p}$ на $\varphi$ получаем

$$(T_{n''}^* \varphi, [T_{n''}^* \varphi]^*) - (T_{n''_p}^* \varphi, [T_{n''_p}^* \varphi]^*) \rightarrow 0$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$\| T_{n''}^* \varphi \|^2 - \| T_{n''_p}^* \varphi \|^2 \rightarrow 0$$

при $n_p'' > n \to \infty$

откуда следует

$$\| T^*_{n''} \varphi \| - \| T^*_{n_p''} \varphi \| \to 0 \tag{2.2}$$

при $n_p'' > n \to \infty$

По известной теореме (см. гл. 2 § I) из $T^*_{n''} \varphi \rightharpoonup g$ и (2.2) следует сильная сходимость $T^*_{n''} \varphi$ к $g$ при $n'' \to \infty$.

Необходимость доказана.

<u>II. Достаточность.</u> Достаточность докажем от противного.

Пусть $\mathcal{T}^*$ компактно на каждом элементе $\varphi \in B'^*$.

Предположим, что $\mathcal{T}$ не является слабо предельно непрерывным. Это значит, что существуют такое $\varphi \in B'^*$ и $\alpha > 0$, что $|(\varphi, T_{n_{k'}} f_{k'})| > \alpha$, где $\{k'\}$ – некоторая подпоследовательность индексов, а $f_k$ некоторая слабо сходящаяся последовательность.

Пусть $T_{n_{k''}} \varphi$ – сильно сходящаяся подпоследовательность:

$$T^*_{n_{k''}} \varphi \to g$$

при $k'' \to \infty$, $\{k''\} \subset \{k'\}$

Тогда

$$(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''}) = (T^*_{n_{k''}} \varphi, f_{k''}) = (T^*_{n_{k''}} \varphi - g, f_{k''}) + (g, f_{k''}) \leq$$

$$\leq \| T^*_{n_{k''}} \varphi - g \| \, \| f_{k''} \| + (g, f_{k''}) \tag{2.3}$$

Так как $T^{*}_{n_{k''}}\varphi \to g$ , то $\| T^{*}_{n_{k''}}\varphi - g \| \to 0$
Нормы $\| f_{k''} \|$ ограничены (см. гл. 2 § I) и поэтому

$$\| T^{*}_{n_{k''}}\varphi - g \| \, \| f_{k''} \| \to 0$$

при $k'' \to \infty$

Последовательность $(g, f_{k''}) \to 0$ в силу слабой сходимости $f_{k''}$ .

В результате из (2.3) получаем

$$(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''}) \to 0$$

при $k \to \infty$ , что противоречит $|(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''})| > \alpha$

Достаточность, доказана.

## § 3. Теорема о сильной сходимости обратных операторов и ее применение.

Из доказанных лемм непосредственно вытекает следующая

Теорема 5.2

Пусть $\{ T_n \}$ последовательность замкнутых операторов с общей областью определения $D \subset B$ и областью значений $R(T_n) = B'$ , где $B'$ - рефлексивно.

Пусть последовательность $T_n g$ для $g \in D$ слабо сходится к элементу $Tg$ . Пусть далее $T_n^{-1}$ и $T_n^{-1*}$ существуют и последовательности $\{ T_n^{-1} \}$ и $\{ T_n^{-1*} \}$ слабо предельно непрерывны.

Тогда оператор $T^{-1}$ существует и ограничен на своей области определения $\bar{R} = \overline{TD}$ ,и последовательность $T_n^{-1}$ сильно сходится к $T^{-1}$ на $\bar{R}$ .

Доказательство. В силу теоремы 5.I оператор $T^{-1}$ существует и $T_n^{-1}$ слабо сходится к $T^{-1}$ на $\bar{R}$. В силу леммы 5.2, поскольку последовательность $\{T_n^{-1*}\}$ слабо предельно непрерывна, то из слабой сходимости $\{T_n^{-1}\}$ следует сильная сходимость этой последовательности операторов.

Пример. Рассмотрим уравнение вида:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} +$$

$$+\sin^2\frac{z}{\varepsilon}\, c^2(x,y,z)\, u_\varepsilon(x,y,z) = \mathcal{F}(x,y,z) \tag{3.I}$$

$$u|_\Gamma = 0 \qquad c^2 \geqslant \alpha > 0, \quad C \in W_2^1 \quad ,$$

где $\Gamma$ - выпуклая поверхность. Рассмотрим пространство $L_2[\Omega]$ функций в области $\Omega$, ограниченной $\Gamma$.

Очевидно, что оператор $L_\varepsilon$ слабо сходится к оператору

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2}(x,y,z) \; ,$$

определенному на функциях обращающихся в нуль на $\Gamma$. Покажем, что из теоремы 5.2 вытекает, что $\{u_\varepsilon\}$ сильно сходится к решению задачи $L_0 w = \mathcal{F}(x,y,z)$; $w|_\Gamma = 0$

Заметим, прежде всего, что обратный оператор $L_\varepsilon^{-1}$ ограничен. Действительно, умножив (3.I) на $u_\varepsilon$ и интегрируя по $x, y, z$, получим

$$\left\{\varepsilon\left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z}\right)^2\right\} dx\,dy\,dz +$$

$$+\int \sin^2\frac{z}{\varepsilon}\, c^2 u_\varepsilon^2\, dx\,dy\,dz = \int \mathcal{F}(x,y,z)\, u_\varepsilon\, dx\,dy\,dz \leq$$

$$\leq \sqrt{\int \mathcal{F}^2 dx\,dy\,dz}\ \sqrt{\int u_\varepsilon^2\, dx\,dy\,dz}$$

отсюда, поскольку $\| u \| \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|$ ( $\| \ \|$ - норма в $L_2(\Omega)$ ) (см. / 72,2) /), то

$$\| u \|^2 \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|^2 \leq C \, \| \mathcal{F} \| \, \| u \|$$

следовательно, $\| u \| \leq C \| \mathcal{F} \|$ и $\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\| \leq C \| \mathcal{F} \|$

Покажем, что обратный оператор $L_\varepsilon^{-1}$ слабо предельно непрерывен.

Пусть правая часть $\mathcal{F}_n(x,y,z)$ уравнения

$$L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = \mathcal{F}_n(x,y,z) \qquad u|_\Gamma = 0$$

слабо сходится к нулю. Нам надо показать, что $u_{\varepsilon n}$ слабо сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$.

Умножим (3.I) на гладкую функцию $\varphi(x,y,z)$, обращающуюся в нуль на $\Gamma$, и проинтегрируем по области $\Omega_\Gamma$ ограниченной $\Gamma$

$$-\varepsilon \iiint\limits_{\Omega_\Gamma} \varphi\, \Delta_2 u_{\varepsilon n}\, d\Omega - \iiint\limits_{\Omega_\Gamma} \varphi \frac{\partial^2 u_{\varepsilon n}}{\partial z^2}\, d\Omega + \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\Gamma} c^2 \varphi\, u_{\varepsilon n}\, d\Omega$$

$$-\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_\Gamma} c^2 \cos 2\frac{z}{\varepsilon}\, \varphi\, u_{\varepsilon n}\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_\Gamma} \mathcal{F}_n(x,y,z)\, \varphi\, d\Omega$$

Имеем
$$\varepsilon\iiint\varphi\,\Delta_2 u_{\varepsilon n}\,d\Omega = \varepsilon\iiint\Delta_2\varphi\, u_{\varepsilon n}\,d\Omega \to 0$$
при $\varepsilon\to 0$ равномерно по $n$, поскольку $u_{\varepsilon n}$ ограничена по норме.

Из ограниченности $\frac{\partial u_{\varepsilon n}}{\partial z}$ в $L_2$ следует:
$$\int c^2\cos 2\frac{z}{\varepsilon}\,\varphi\, u_{\varepsilon n}\,d\Omega =$$
$$= -\frac{\varepsilon}{2}\int\sin\frac{2z}{\varepsilon}\,\frac{\partial(u_{\varepsilon n}c^2\varphi)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \to 0$$
при $\varepsilon\to 0$

равномерно по $n$.

Отсюда
$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\varphi(x,y,z)\left\{\frac{\partial^2 u_{\varepsilon n}}{\partial z^2} - \frac{c^2(x,y,z)}{2}\,u_{\varepsilon n}\right\}dx\,dy\,dz = 0$$

Следовательно,
$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int u_{\varepsilon n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2}\varphi\right)dx\,dy\,dz = 0$$

Сопряженный оператор к оператору $A = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2}(x,y,z)$, заданному на гладких функциях, обращающихся в нуль на $\Gamma$, есть очевидно самосопряженный оператор $\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2}(x,y,z)$ заданный в области $\Omega$. Он не имеет собственного значения, равного нулю. Поэтому область значений исходного оператора

$A$ всюду плотна. Следовательно, сходимость $u_{n\varepsilon}$ к нулю осуществляется на всюду плотном множестве. Поскольку $u_{n\varepsilon}$ ограничены по норме, отсюда следует слабая сходимость $u_{n\varepsilon}$ к нулю. Мы доказали, таким образом, что оператор $L_\varepsilon^{-1}$ слабо предельно-непрерывен. Из теоремы следует, что семейство $L_\varepsilon^{-1}$ сильно сходится к $L_0^{-1}$, что и требовалось.

## § 4. Регуляризация в теории возмущений слабо сходящихся операторов

В задачах теории возмущений, для которых можно установить, что решение возмущенного уравнения сходится в некоторой слабой топологии к решению предельной задачи, может быть применен метод регуляризации, развитый в главе I (см. в особенности § 3 гл. I части 2).

Рассмотрим пространство $L_2$ функций от $x \in R^n$ и пространство $W_p^N[\rho^2]$ - банахово пространство функций $g(x)$, $x \in R^n$ с нормой:

$$\| g \|^p_{W_p^N[\rho^2]} = \int_{-\infty}^{\infty} | D^N g(x) |^p \rho^2(x)\, dx$$

$\rho(x) > 1$ и непрерывна.

Мы будем рассматривать в $L_2$ некоторое семейство линейных операторов $L_\varepsilon$ с плотной областью определения, такое, что $L_\varepsilon^{-1*}$ существует, его область определения содержит $W_p^N[\rho^2]$ и его сужение, как семейство операторов из $W_p^N[\rho^2]$ в $L_2$ равномерно ограничено.

Рассмотрим в соответствии с § 3 гл I части I плотность вероятности $\varphi(y) = \varphi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$ – положительную функцию $y$, такую, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy = 1$

Относительно $\varphi(y)$ сделаем следующие дополнительные предположения:

1) $\int\limits_{-\infty} \varphi(y)\,|y|^2\,dy < \infty$

2) $\varphi(y) \in W_p^N[\rho^2]$

3) $|\xi|^{n+1} \rho^2(x-\xi)\,|D^N \varphi(\xi)|^p \leq C_0(x)$ при $|\xi| > 1$

4) $$\frac{A^{n/p}\,|D^N \cdot \varphi(A\xi)|}{D^N \varphi(\xi)} \leq C_1$$

при $A \to \infty$

Если же $\rho(x) = const$, то условия 3) и 4) можно опустить.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2[R^n]$ оператор $L_\varepsilon = A + \varepsilon B_\varepsilon$ и семейство элементов $f_\varepsilon \in L_2[R^n]$, сильно сходящееся к $f \in L_2[R^n]$

Обозначим $\delta(\varepsilon) = \| f_\varepsilon - f \|_{L_2}$.

<u>Теорема 5.2.</u>

Предположим, что

1) $L_\varepsilon^{-1}$ существует;

2) $A^{-1} f$ – непрерывно дифференцируемая функция;

3) операторы $A^{-1*} B_\varepsilon^* L_\varepsilon^{-1*}$ и $L_\varepsilon^{-1*}$, как операторы, действующие из $W_p^N[\rho^2]$ в $L_2[R^n]$ ограничены, т.е.

$$\|L_\varepsilon^{-1*} g\|_{L_2} \leq C_1 \|g\|_{W_p^N[\rho^2]}$$

$$\|A^{-1*} B_\varepsilon^* L_\varepsilon^{-1*} g\|_{L_2} \leq C_2 \|g\|_{W_p^N[\rho^2]}$$

тогда

$$\left| \frac{1}{(\sigma(\varepsilon)+\varepsilon)^{n\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-\xi}{[\sigma(\varepsilon)+\varepsilon]^{\alpha}}\right) L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon(\xi)\, d\xi - A^{-1} f(x) \right| \leq$$

$$\leq C(x) \left[\sigma(\varepsilon)+\varepsilon\right]^{2\alpha} ,$$

где $\alpha = \left(2 + N + \frac{n}{q}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right)$, а $C(x)$ - некоторая непрерывная функция $x$, не зависящая от $\varepsilon$.

Доказательство.

Имеем для $\varphi \in W_p^N[\rho^2]$

$$(\varphi, L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon - A^{-1} f) = (\varphi, L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon - L_\varepsilon^{-1}(A + \varepsilon B_\varepsilon) A^{-1} f) =$$

$$= (L_\varepsilon^{-1*} \varphi, f_\varepsilon) - (A^{-1*} (A + \varepsilon B_\varepsilon)^* L_\varepsilon^{-1*} \varphi, f) = (L_\varepsilon^{-1*} \varphi, f_\varepsilon - f) -$$

$$-\varepsilon (A^{-1*} B_\varepsilon^* L_\varepsilon^{-1*} \varphi, f) \leq \|L_\varepsilon^{-1*} \varphi\| \|f_\varepsilon - f\| + \varepsilon \|A^{-1*} B_\varepsilon^* L_\varepsilon^{-1*} \varphi\| \cdot \|f\|$$

и учитывая, что

$$\|L_\varepsilon^{-1*} \varphi\| \leq C_1 \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]}$$

$$\|A^{-1*} B_\varepsilon^* L_\varepsilon^{-1*} \varphi\| \leq C_2 \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]} ,$$

получим

$$(\varphi, L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon - A^{-1} f) \leq C (\sigma(\varepsilon)+\varepsilon) \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]}$$

Утверждение теоремы будет следовать из следующей леммы.

Лемма 5.4

Пусть семейство обобщенных функций $f_\varepsilon(x)$ является семейством функционалов на $W_p^N[\rho^2]$ в

$$\left(f_\varepsilon(x)-f(x),\ \varphi(x)\right)_{L_2} \leq \varepsilon \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]},$$

где x/ $f(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда для любой фиксированной точки $x$ имеет место соотношение

$$f(x)=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{Y}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)f_\varepsilon(\xi)\,d\xi+O(\varepsilon^{2\alpha})$$

Доказательство

Сделаем в интеграле

$$\left\|\mathcal{Y}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)\right\|^p_{W_p^N[\rho^2]}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|D^N\mathcal{Y}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)\right|^p\rho^2(\xi)\,d\xi$$

замену $\eta=\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}$. Мы получим:

$$\left\|\mathcal{Y}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)\right\|^p_{W_p^N[\rho^2]}=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha(Np-n)}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|D^N\mathcal{Y}(\eta)\right|^p\rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha)\,d\eta$$

Представим последний интеграл в виде суммы 3-х интегралов:

$$I_1(\varepsilon^\alpha,x)=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\varepsilon^\alpha}}\left|D^N\mathcal{Y}(\eta)\right|^p\rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha)\,d\eta$$

---

x/ Т.е. $\|f_\varepsilon-f\|_{W_p^{-N}}\leq\varepsilon$, поскольку именно так определяется норма в $W_p^{-N}$.

$$I_2(\varepsilon^\alpha; x) = \int\limits_{-1/\varepsilon^\alpha}^{1/\varepsilon^\alpha} |D^N \varphi(\eta)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha)\,d\eta$$

$$I_3(\varepsilon^\alpha; x) = \int\limits_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} |D^N \varphi(\eta)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha)\,d\eta$$

Имеем

$$I_2(\varepsilon^\alpha; x) \le \operatorname*{Max}_{|\xi|\le 1} \rho^2(x-\xi) \int\limits_{-1/\varepsilon^\alpha}^{1/\varepsilon^\alpha} |D^N \varphi(\eta)|^p d\eta \le$$

$$\le \operatorname*{Max}_{|\xi|\le 1} \rho^2(x-\xi) \, \| \varphi(\xi) \|^p_{W_p^N[\rho^2]}$$

$$I_3(\varepsilon^\alpha, x) = \int\limits_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} |D^N \varphi(\eta)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha)\,d\eta =$$

$$= \int\limits_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} |D^N \varphi(\xi)|^p \rho^2(x-\varepsilon^\alpha\eta)(|\eta|\varepsilon^\alpha)^{n+1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha(n+1)}} \left| \frac{D^N\varphi(\eta)}{D^N\varphi(\xi)} \right|^p \frac{d\eta}{|\eta|^{n+1}} \le$$

$$\le \frac{C_0(x)\, C_1'^{\,p}}{\varepsilon^\alpha} \int\limits_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+1}} \le C_2(x) \;,$$

где $\xi = \eta\varepsilon^\alpha$.

Аналогичное неравенство, очевидно, имеет место и для $I_1(\varepsilon^\alpha, x)$.

Таким образом,

$$\left\| \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]} \le \frac{C_3(x)}{\varepsilon^{\alpha(N-\frac{n}{p})}} \qquad (4.1)$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right)(x-\xi)^2 d\xi = \varepsilon^{\alpha(n+2)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)\,\eta^2 d\eta = C\varepsilon^{\alpha(n+2)} \tag{4.2}$$

Пусть

$$f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi)\, d\xi, \quad M = \frac{1}{2} \max_{\substack{1 \le i,j \le n \\ 0 \le |\xi| \le \infty}} \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|$$

Имеем

$$\left| f(x) - f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) \right| \le \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \left| f(x) - f(\xi) \right| d\xi + \right.$$

$$\left. + \int \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \left| f(\xi) - f_{\varepsilon}(\xi) \right| d\xi \le \right.$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ M \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right)(x-\xi)^2 d\xi + \varepsilon \left\| \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]} \right\}$$

Отсюда и из 4.I и 4.2 следует

$$\left| f(x) - f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) \right| \le C\varepsilon^{2\alpha} + C_3(x)\,\varepsilon^{\left[1-\alpha\left(N+\frac{n}{q}\right)\right]} \tag{4.3}$$

Полагая в (4.3) $\alpha^{-1} = 2 + N + \frac{n}{q}$, получим

$$\left| f(x) - f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) \right| \le C(x)\, e^{2\alpha}, \quad f_{\varepsilon}^{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi)\, d\xi$$

что и требовалось.

Эта теорема может быть применена к интегро-дифференциальным уравнениям с параметром, например, таких, которые встречаются в специальной теории регуляризации некорректных задач А.Н.Тихонова. Кроме того, при $B_\varepsilon=0$ она может быть использована при решении некорректных задач

$$Tu = f,$$

если $T^{-1*}$ ограничен из $W_p^N[\rho^2]$ в $L_2$.

С помощью леммы можно "улучшать" слабую и сильную сходимость решений, доказанную в этой главе. В частности, если

$$\| f_k - f \|_{L_2} = \sigma_k \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty, \ a \ f(x) \in C^2,$$

то

$$\left| f(x) - \frac{1}{\sigma_k^{\frac{2n}{4+n}}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left( \frac{x-\xi}{\sigma_k^{\frac{2}{4+n}}} \right) f_k(\xi)\, d\xi \right| \cong \sigma_k^{\frac{4}{4+n}}.$$

# ЧАСТЬ II

## ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В БОЛЬШОМ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

# ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

## § I. Характеристики уравнений квантовой механики.

Уравнения квантовой механики еще не занимают подобающего им места в науке об уравнениях с частными производными.

Уравнения квантовой механики описывают волновые свойства элементарных частиц, так же как обычное волновое гиперболическое уравнение описывает волновые свойства фотона (света).

Волновые свойства света были обнаружены значительно раньше, чем волновые свойства электрона. В математической литературе давно уже изучается волновое уравнение. Его свойства были положены в основу определения одного из основных классов уравнений с частными производными-гиперболических систем уравнений. Уравнение Шредингера, напротив, вообще не принадлежит ни к гиперболическим, ни к эллиптическим, ни к параболическим уравнениям, а является просто корректным по Петровскому и с этой точки зрения кажется неким особым частным случаем. А с точки зрения квантовой физики, наоборот, именно волновое уравнение, как уравнение, описывающее фотон, является особым предельным случаем, ибо оно описывает поведение частицы с массой, равной нулю. Именно с такой точки зрения мы и будем здесь рассматривать волновое уравнение и уравнение Максвелла.

Для уравнений квантовой механики существенным с физической точки зрения является функциональное пространство, в котором они рассматриваются. Мы введем ниже классификацию урав-

ний с учетом сопоставленных им функциональных пространств. Если этим пространством является пространство непрерывных функций, то произведенная классификация будет совпадать с обычной.

Физическому соответствию между волновой оптикой и геометрической отвечает такое глубокое математическое понятие как характеристики и бихарактеристики гиперболического уравнения. Оказывается, однако, что строящиеся формальным образом бихарактеристики и характеристики квантовых уравнений не совпадают с траекториями и поверхностями постоянного действия классической механики. В то же время физики де-факто считают бихарактеристиками уравнения Шредингера решения соответствующих ему уравнений Гамильтона.

Оказывается, специфическая постановка задач квантовой механики приводит к обобщению обычного понятия характеристики.

## I°. Распространение разрывов решений некоторых конкретных задач.

I. Как известно, к понятию характеристик для гиперболических систем можно придти с помощью следующей задачи о распространении разрыва. Пусть существует разрывное обобщенное в каком-либо смысле решение $u(x,t)$ гиперболической системы. Требуется конструктивно определить такую функцию $\varphi(x,t)$ (не являющуюся, вообще говоря, решением этого уравнения), что разность $u(x,t)-\varphi(x,t)$ была бы достаточно гладкой. Функция $\varphi(x,t)$ и характеризовала бы поведение разрыва.[38]

Известно, что при достаточно малом $t$ задача построения функций $\varphi(x,t)$ может быть редуцирована к более простой: нахождению решения уравнения характеристик.

Рассмотрим в качестве примера волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x,t)\Delta u\,; \quad c^2(x,t)\neq 0 \qquad x = x_1,\dots,x_n \qquad (1.1)$$

где $u(x,t)$ удовлетворяет разрывным[x] начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) f^+(x)\,; \quad u'_t(x,0) = 0 \qquad (1.1a)$$

$\Big( f^+(x) = f(x)$ при $f(x) > 0\,;\ f^+(x) = 0$ при $f(x) < 0 \Big)$

Все функции: $\varphi(x),\ f(x),\ c(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими, кроме того, $\varphi(x)$ - финитна и имеет компактный носитель $\Omega$.

Характеристическое уравнение для $(1.1)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2(x,t)\,(\nabla S)^2$$

Положим $S(x,0) = f(x)$. Чтобы выделить одну из ветвей решения характеристического уравнения, зададим

$$\left.\frac{\partial S_\nu}{\partial t}\right|_{t=0} = (-1)^\nu c(x,0)\left|\nabla S_\nu(x,t)\right|_{t=0} = (-1)^\nu c(x,0)\ \mathrm{grad}\, f(x)$$

Двум ветвям решения характеристического уравнения

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial t} = (-1)^\nu H(x,\nabla S_\nu,t)\,, \qquad H(x,p,t) = c(x,t)\,|p|$$

$$\nu = 1,2 \qquad\qquad p = p_1,\dots,p_n$$

---

x/ Здесь рассматривается слабый разрыв, т.е. разрыв производной

соответствуют решения $p^\nu(t)$, $x^\nu(t)$, $\nu=1,2$

двух систем бихарактеристических уравнений:

$$\dot{p}_i^\nu=(-1)^{\nu+1}\frac{\partial H(x^\nu,p^\nu,t)}{\partial x_i^\nu} \qquad \dot{x}_i^\nu=(-1)^\nu\frac{\partial H(x^\nu,p^\nu,t)}{\partial p_i^\nu}$$

$$i=1,\dots,n \qquad (1.2)$$

$$\frac{dS_\nu}{dt}=(-1)^\nu\left(H(x^\nu,p^\nu,t)-\sum_i p_i^\nu H_{p_i^\nu}(x^\nu,p^\nu,t)\right) \qquad \nu=1,2,$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$x^\nu(0)=x_0 \qquad p^\nu(0)=\nabla f(x_0), \quad x_0=x_{01},\dots,x_{0n}\in\Omega,$$

где $\Omega$ – область определения (носитель) $\varphi(x)$.

Мы обозначим

$$x^\nu(t)=X^\nu(t,x_0); \qquad p^\nu(t)=P^\nu(t,x_0)$$

При достаточно малом $t\leqslant t_0$ кривые $X^\nu(t,x_0)$ при всевозможных $x_0\in\Omega$ и при фиксированном $\nu$ образуют $n$ – параметрическое семейство, причем

$$Y^\nu(t,x_0)=\det\left\|\frac{\partial X_k^\nu(t,x_0)}{\partial x_{0j}}\right\|>0,$$

поскольку

$$Y^\nu(0,x_0)=1.$$

Поэтому неявное уравнение

$$X^\nu(t,x_0)=x \qquad x_0\in\Omega$$

имеет не более одного решения $x_0^\nu(x,t)$ при всех $t\leqslant t_0$

Нетрудно видеть, что решение исходной задачи может быть представлено в виде полусуммы двух решений $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_1(x,t) + u_2(x,t)\right]$ волнового уравнения, удовлетворяющих начальным условиям:

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x) f^+(x)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = c(x,0)\left|\operatorname{grad} f(x)\right| \varphi(x)\, \theta[f(x)] \qquad (1.3)$$

где $\theta(\xi) = 0$ при $\xi < 0$, $\theta(\xi) = 1$ при $\xi > 0$

Каждое из решений $u_\nu(x,t)$, $\nu = 1,2$, как мы сейчас увидим, отвечает одной из ветвей $S_\nu(x,t)$ решения характеристического уравнения.

При высказанных предположениях имеет место следующее предложение [38]

Решение $u_\nu(x,t)$ $\nu = 1,2$ задачи (1.1), (1.3) может быть представлено в виде

$$u_\nu(x,t) = \frac{\varphi[x_0^\nu(x,t)]}{\sqrt{Y^\nu[t, x_0^\nu(x,t)]}} f^+[x_0^\nu(x,t)] + \mathcal{F}^\nu(x,t)$$

$$\nu = 1,2 \quad ,$$

где $\mathcal{F}^\nu(x,t)$ непрерывно дифференцируемая функция.

Следствие. Поскольку решение задачи (1.1)-(1.1а) представляется в виде $u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2} u_\nu(x,t)$, то и $u(x,t)$ непрерывно дифференцируемо вне суммы двух областей $\Omega_t^\nu = X^\nu(t,\Omega)$, $\nu=1,2$. Действительно, если $x \bar{\in} \Omega_t^\nu$, то $x_0^\nu \bar{\in} \Omega$, следовательно, $\varphi(x_0^\nu) = 0$

2. Рассмотрим теперь смешанную задачу. Пусть $u(x,y,t)$ удовлетворяет линейному уравнению четвертого порядка

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\,\partial y^2}+a(x,y,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial y^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x,t)\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2}=0,$$

краевым условиям

$$u\big|_{y=0}=u\big|_{y=\pi}=0$$

и разрывным начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)f^+(x)\sin y$$

$$u'\big|_{t=0}=0,$$

где $\varphi$ - финитная функция.

Если бы коэффициент $a(x,y,t)$ не зависел от $y$ :

$$a(x,y,t)=c(x,t),$$

то можно было бы применить метод разделения переменных. В этом случае замена $u(x,y,t)=v(x,t)\sin y$ привела бы к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(1+b_i^2(x,t))-c(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_1},$$

характеристики которого удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2(1+b_i^2(x,t)) \qquad (1.4)$$

Если $a(x,y,t)$ зависит от $y$, то такой метод, разумеется, не применим. Тем не менее и в этом случае, как мы увидим в дальнейшем, распространение разрыва решения $u(x,y,t)$ определяется решением уравнения ( 1.4 ), которое

мы будем считать характеристическим.[*)]

Мы дадим (гл. 4 ) общую формулу, определяющую распространение разрыва решений широкого класса задач, с помощью которой решение исходной задачи может быть представлено в виде

$$u = \frac{1}{2}\left(u_+(x,y,t) + u_-(x,y,t)\right)$$

$$u_\pm = 2H_\pm\left(x, P(x_0^\pm(x,t),t),t\right)\varphi(x_0^\pm(x,t))\left|\frac{\partial x_0^\pm}{\partial x}\right|^{1/2}\sin y\,\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\int_0^t dt\,\frac{P_1(x_0^\pm,t)}{2H_\pm\left(X(x_0^\pm,t),P(x_0^\pm,t),t\right)}\int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin^2 y\cdot a(X,y,t)\,dy\right\} f^+(x_0^\pm)$$

$$+\mathcal{F}(x,y,t)$$

где $x_0^\pm = x_0^\pm(x,t)$; $H_\pm(x,p,t) = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(1+b_i^2(x,t)\right)P_i^2}$ ,

$X_\pm(x_0,t)$, $P_\pm(x_0,t)$ – решение системы

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_\pm}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_\pm}{\partial x_i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

$x_0^\pm(x,t)$ – решения уравнений $X_\pm(x_0,t) = x$,

а $\mathcal{F}(x,y,t)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

3. Рассмотрим теперь другой пример, в котором разрыв распространяется не по характеристикам, понимаемым в обычном смысле.

Пусть $u(x,y,z,t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+tz^2)\frac{\partial u}{\partial x} + z^2\frac{\partial u}{\partial y} + xz^4 u = \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\,\partial y}$$

---

x/ Напомним, что обычное уравнение характеристик определяется лишь членом , содержащим четвертую производную.

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x)\,\theta(y)\,e^{-z^2/4}\qquad ,$$

$\varphi(x)$ - финитная бесконечно дифференцируемая функция. В этом случае, как мы увидим далее, решение $u(x,y,z,t)$ может быть представлено в виде

$$u(x,y,z,t)=\varphi\left[x-t-\frac{t^2}{4}\right]\theta[y+t]\,e^{-\frac{z^2}{4}+\sqrt{3\pi}\left(xt-\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{6}\right)}+$$

$$+\mathcal{F}(x,y,z,t)\ ,$$

где $\mathcal{F}(x,y,z,t)$ - непрерывная функция.

Здесь разрыв распространяется вдоль поверхностей, определяемых уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}+\sqrt{t\frac{\partial S}{\partial x}+1}=0\ ,$$

которое естественно считать в данном случае характеристическим.

4. Аналогичную задачу мы поставим для более общих уравнений, несколько видоизменив требование на разность функций $u(x,t)-\varphi(x,t)$. Потребуем, чтобы некоторое число производных от этой разности принадлежало некоторому конкретному банахову пространству $B$, но не обязательно $C$.

Рассмотрим решение $u(x,y,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2(x,t)\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0\qquad(1.5)$$

$$a^2(x,t)+b^2(x,t)\neq 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,0)=\varphi(x)\,\delta(y-y_0)$$

$$u'_t(x,y,0)=0 \qquad (1.5a)$$

Пусть коэффициенты уравнения достаточно гладки, а $\varphi(x)$ финитна и имеет компактный носитель $\Omega$. Требуется найти функции $\varphi(x,y,t)$, такие, чтобы разность

$$u(x,y,t)-\varphi(x,y,t)$$

принадлежала бы $L_2[R^2]$ ($R^n$ – $n$-мерное эвклидово пространство). Мы увидим ниже, что класс функций $\varphi(x,y,t)$ может быть построен с помощью решений уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\left[a^2(x,t)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+b^2(x,t)\right]^{1/2}$$

которое мы и назовем в данном случае характеристическим. (Ниже будет дано общее определение характеристик)

Соответственно имеем системy Гамильтона

$$\dot p=\frac{\partial H}{\partial x}\,;\quad \dot x=-\frac{\partial H}{\partial p}\qquad H=\sqrt{a^2p^2+b^2}$$

$$\frac{dS}{dt}=[H-pH_p]$$

Решения $x(t),\ p(t),\ S(t)$ этих уравнений при достаточно малых $t \leq t_0$ и начальных условиях

$$x(0)=x_0\ ;\quad p(0)=0 \qquad S(0)=0$$

образуют однопараметрическое семейство.

Мы обозначим, как и прежде:

$$x(t)=X(t,x_0),\quad p(t)=P(t,x_0),\quad S(t)=S(t,x_0)$$

При достаточно малых $t \leq t_0$ производная

$$Y(t,x_0)=\frac{\partial X(t,x_0)}{\partial x_0}>0$$

и решение уравнения $X(t,x_0)=x$ единственно: $x_0=x_0(x,t)$. Имеет место следующее предложение:

Решение $u(x,y,t)$ задачи (1.5), (1.5a) при $t \leq t_0$ может быть представлено в виде

$$u(x,y,t)=\frac{\varphi(x_0)\cos\dfrac{(y-y_0)^2}{2S^{\nu}(t,x_0)}}{\sqrt{S(t,x_0)\ Y(t,x_0)}}+\mathcal{F}(x,y,t)$$

$$x=x_0(x,t)$$

где $\mathcal{F}(x,y,t) \in L_2[R^2]$ при любом фиксированном $t \leq t_0$.

Следствие.

Сужение решения задачи $(1.5)-(1.5a)$ на область $R^2 \setminus \Omega_t$, где $\Omega_t = X(t,\Omega)\times(-\infty \leq y \leq \infty)$, принадлежит $L_2[R^2 \setminus \Omega_t]$

5. Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики - уравнение Шредингера - имеет вид

$$i h \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu} \Delta \psi + v(x,t)\psi \qquad x = x_1, \dots, x_n \qquad (1.6)$$

здесь $h$ и $\mu$ - константы ( $h$ - постоянная Планка, $\mu$ - масса частицы).

Предположим, что $\psi(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\psi(x,0) = \delta(x - x_0) \qquad (1.7)$$

Если $v(x,t)$ ограничена и бесконечно дифференцируема $(v(x,t) \in C^\infty)$, то решение $\psi(x,t)$ в любой момент $t > 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией в каждой точке $x$. Однако, как само решение $\psi(x,t)$ при фиксированном $t$, так и его производные по $x$, не принадлежат $L_2[R^n]$. Следовательно, зада-

ча о нахождении такой функции $\psi_0(x,t)$, что разность $\psi(x,t)-\psi_0(x,t)$ была бы дифференцируема в $L_2[R^n]$ нетривиальна.

Мы поставим еще более ограничительные условия на разность

$$\psi(x,t)-\psi_0(x,t)$$

Забегая вперед, заметим, что нам будет важна зависимость решения уравнения Шредингера от параметра $h$, поэтому мы будем $\psi$ считать функцией не только $x$ и $t$, но и $h$: $\psi=\psi(x,t,h)$. Предположим, что решение $\psi$ при каждом фиксированном $t$ принадлежит пространству $L_2[R^{n+1}]$ функций $\mathcal{F}(x,h)$ с нормой

$$\left(\int_0^1 dh \int |\mathcal{F}(x,h)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{1.8}$$

Функция вида

$$\mathcal{F}(x,h)=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\} \tag{1.9}$$

(где как и раньше $\varphi(x)\in C^\infty$ и финитна, $\Omega=D[\varphi(x)]$, а $f(x)\in C^\infty$ ) недифференцируема в $L_2[R^{n+1}]$

Решения уравнения $(1.6)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(x,0,h)=\mathcal{F}(x,h) \tag{1.10}$$

при $t>0$ также не будет дифференцируемо в $L_2[R^{n+1}]$

Поэтому можно поставить задачу о построении функций $\psi_0(x,t,h)$ такой, что разность $\psi-\psi_0$ диффе-

ренцируема в $L_2[R^{n+1}]$. Уравнением, с помощью которого оказывается возможным сконструировать $\psi_0(x,t,h)$ является уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}(\nabla S)^2 + v(x,t) = 0$$

Его характеристиками служат решения системы Гамильтона

$$\mu\dot{x} = p \qquad \dot{p} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{p^2}{2\mu} - v(x,t) \qquad (1.11)$$

Поставим начальные условия

$$x(0) = x_0\,; \quad p(0) = \nabla f(x_0)\,; \quad S(0) = f(x_0)$$

Обозначим, как и ранее,

$$x(t) = X(t,x_0)\,; \quad p(t) = P(t,x_0)\,; \quad S(t) = S(t,x_0)$$

При $t \leq t_0$ решение уравнения $X(t,x_0) = x_0$ для $x \in D[\varphi(x_0)] = \Omega$ единственно и якобиан

$$Y(t,x_0) = \det\left\| \frac{\partial X_i(t,x_0)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

отличен от нуля.

Имеет место следующее предложение:

Решение задачи (1.6), (1.9), (1.10) может быть представлено в виде

$$\psi(x,t,h) = \frac{\varphi[x_0(x,t)]}{\sqrt{|Y[t,x_0(x,t)]|}}\, e^{\frac{i}{h}S[t,x_0(x,t)]} + \Phi(x,t,h), \quad (1.12)$$

где $\Phi(x,t,h)$, $\frac{1}{h}\Phi(x,t,h)$ и $\frac{\partial \Phi(x,t,h)}{\partial x_i}$ принадлежат $L_2[R^{n+1}]$

Заметим, что оператор умножения на $1/h$ в $L_2[R^{n+1}]$ неограничен и в некотором смысле равноправен с оператором $\frac{\partial}{\partial x}$.

Следствие.

Решения задачи (1.6) (1.10) вне области $X(t,\Omega)$ дифференцируемо в $L_2[R^{n+1} \setminus X(t,\Omega) \times (0 \le h \le 1)]$

Рассмотрим теперь пространство $\mathscr{G}[R^{n+1}]$ непрерывных функций от $h$ $(0 \le h \le 1)$ с интегрируемым квадратом по $x$. Норму $g(x,h) \in \mathscr{G}[R^{n+1}]$ положим равной

$$\operatorname*{Max}_{0 \le h \le 1} \sqrt{\int |g(x,h)|^2 dx}$$

Оказывается, что функция $\Phi(x,t,h)$ в формуле (1.12) такова, что $\Phi(x,t,h)$, $\frac{1}{h}\Phi(x,t,h)$ и

$$\frac{\partial \Phi(x,t,h)}{\partial x_i}, \quad i=1,\dots,n$$

принадлежат $\mathscr{G}[R^{n+1}]$.

2°. Обобщенная задача о "распространении разрыва" для уравнения с операторным коэффициентом.

I. Пусть функция $u(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве $H$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = A\,u(t), \qquad (1.13)$$

где $A$ - такой неограниченный оператор в гильбертовом пространстве, что области определения $D(A^N)$ и $D(A^{*N})$ плотны в $H$ ( $N$ - любое целое число)

Предположим, что

$$u(t) \overline{\in} D(A^2)$$

Задача, аналогичная проблеме распространения разрыва решения гиперболического уравнения, заключается в том, чтобы построить такой элемент $u_N(t)$, что

$$u(t) - u_N(t) \in \mathcal{D}(A^N) \qquad (1.15)$$

Обобщенным решением уравнения $(1.13)$ будем называть функционал (обобщенную функцию) $W(t) = A^N u(t)$ на множестве $\mathcal{D}(A^{*N})$, именно

$$(W(t), g) = (u(t), A^{*N} g),$$

где $g \in \mathcal{D}(A^{*N})$, а $u(t)$ удовлетворяет $(1.13)$

Очевидно, что $A^N u_N(t)$ также функционал на $\mathcal{D}(A^{*N})$. Из $(1.15)$ следует:

$$W(t) - A^N u_N(t) \in H$$

Пусть $W(t)$ - обобщенное решение уравнения $(1.13)$ определенное как функционал на $\mathcal{D}(A^{*N})$. Задача о выделении "сингулярной части" $W(t)$ заключается в следующем. Требуется построить обобщенную функцию $W_0(t)$ такую, чтобы разность

$$W(t) - W_0(t)$$

принадлежала $H$.

Очевидно, что не уменьшая общности, мы можем ставить задачу (I.14) - (I.15) и рассматривать лишь классические решения $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ уравнения (I.13)Чтобы перейти к общей задаче, нужно подействовать на обе части равенства некоторой степенью оператора $A$. Если $-iA$ - самосопряженный оператор, $E_\lambda$ - его спектральная функция, то очевидно что

$$u(t) = e^{At} u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda\, u(0) = \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda\, u(0) +$$

$$+\int_{-\infty}^{-\lambda_0} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda\, u(0) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda\, u(0) .$$

Последний интеграл при любом конечном $\lambda_0$ принадлежит $D(A^N)$, т.е.

$$u(t) - \int_{\lambda_0}^{\infty} \left[ e^{i\lambda t}\, dE_\lambda - e^{-i\lambda t}\, dE_\lambda \right] u(0) \in D(A^N)$$

Отсюда следует, что эта задача связана с задачей об асимптотике $E_\lambda$ при $\lambda \to \infty$ .

3°. Классификация уравнений второго порядка.

Общие свойства решений уравнений (1.1), (1.4), (1.6) могут служить основой для классификации широкого класса уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Мы здесь рассмотрим наиболее простой случай, охватывающий, однако, все уравнения квантовой механики.

Рассмотрим пространство вектор-функций $\psi(x,t)$, $x = x_1, \dots, x_n$ $\psi = \psi_1, \dots, \psi_s(x,t)$ со значениями в гильбертовом пространстве $H$ .

Пусть $B_i(x,t)$, $i = 1, \dots, n$ и $R(x,t)$ ограниченные бесконечно дифференцируемые матрицы $S \times S$ порядка, зависящие от параметров $x, t$; $a_k(x,t)$, $k = 1, 2, 3,$ $b(x,t) = b_1(x,t), \dots, b_n(x,t)$ заданные комплексные бесконечно дифференцируемые функции $x$ и $t$ ( $b(x,t)$ - вектор-функция) со значениями на действительной прямой; $A$ - самосопряженный неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $H$ , не зависящий от $x$ и $t$ . Векторное $S$ - мерное пространство мы обозначим через $R^s$ .

Рассмотрим уравнение

$$\left[a_1(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + iA\,a_2(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + A^2 a_3(x,t) + (\nabla + iA\,b(x,t))^2 + \sum_{k=1}^{n} B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + iA\,R(x,t)\right]\psi(x,t) = 0 \qquad (1.16)$$

После подстановки $\psi = e^{iAS(x,t)}$, приравняв нулю коэффициент при $A^2$, мы получим уравнение, которое мы назовем характеристическим.

$$a_1(x,t)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + a_2(x,t)\frac{\partial S}{\partial t} - a_3(x,t) + \left[\nabla S + b(x,t)\right]^2 = 0 \qquad (1.17)$$

(его можно получить также, исходя из того, что оператор $A$ "равноправен" с оператором $\frac{\partial}{\partial x}$ )

Если корни характеристического многочлена

$$Q(p_0) = a_1 p_0^2 + a_2 p_0 \sum_{i=1}^{n}(p_i + b_i)^2 \qquad (1.18)$$

действительны при любых $p_1, \dots, p_n, x$, то будем говорить, что уравнение (I.16) волнового типа, если чисто мнимы - туннельного типа, если в некоторой области действительны, а в оставшейся - чисто мнимы, то смешанного типа. Остальные типы уравнений мы рассматривать не будем.

4°. Преобразование типа Фурье для абстрактных функций.

I. Определим, что такое, импульсное представление ( $p$ - представление). В случае, если оператор $A$ неотрицательно определен, переход к импульсному представлению совершается при помощи унитарного оператора $\Phi_A^{x_n}$ вида

$$\tilde{\psi}(p)=\Phi_A^{x_n}\quad\psi(x)=\frac{A^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipxA}\psi(x)\,dx\qquad(1.19)$$

Обратно

$$\psi(x)=\Phi_A^{p_n}\quad\tilde{\psi}(p)=\frac{A^{n/2}}{(-2\pi i)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipxA}\tilde{\psi}(p)\,dp\qquad(1.20)$$

Если оператор $-A$ неотрицательно определен, то

$$\psi(x)=\Phi_A^{p_n}\quad\tilde{\psi}(p)=\frac{(-A)^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipxA}\tilde{\psi}(p)\,dp\qquad(1.21)$$

Пусть оператор $A$ не является знакоопределенным. Разложим пространство $H$ на сумму $H=H^{+}+H^{-1}$ подпространств таких, что сужение оператора $A$ на $H^{+}$ есть неотрицательно определенный оператор, который мы обозначаем через $A^{+}$, а сужение оператора $-A$ на $H^{-}$ есть неотрицательно определенный оператор, мы его обозначим через $-A^{-}$.

Пусть $\tilde{\psi}(p)$ - функция со значениями в $H$.

Положим

$$\tilde{\psi}(p)=\tilde{\psi}^{+}(p)+\tilde{\psi}^{-}(p);\quad\tilde{\psi}^{+}(p)\in H^{+};\quad\tilde{\psi}^{-}(p)\in H^{-}$$

Тогда по определению,

$$\Phi_A^{p_n}\quad\tilde{\psi}(p)=\Phi_{A^{+}}^{p_n}\quad\tilde{\psi}^{+}(p)+\Phi_{A^{-}}^{p_n}\quad\tilde{\psi}^{-}(p)\qquad(1.22)$$

Аналогично определяется оператор $\Phi_A^{x_n}$

2. Введем теперь аналогичный оператор в пространстве функций от $x$ со значениями в банаховом пространстве $B$

Рассмотрим в банаховом пространстве $B$ оператор $A$, с всюду плотной областью определения $D(A)$

Пусть $(1+\varepsilon A)^{-1}$ существует и определен всюду в $B$, причём $\|(1+\varepsilon A)^{-1}\| \leqslant 1$ при $\varepsilon>0$ и $\varepsilon$ чисто мнимом. Рассмотрим оператор $T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{i\pi}{4}} A \int_0^\infty e^{iAx^2} dx$, заданный на $D(A)$. Этот оператор обладает следующими свойствами (см. гл. 6 § I):

а) $T^2 = A$ на $D(A)$, б) $T = \bar{T}$, где $\bar{T}$ - означает комплексно сопряженный оператор и имеет вид

$$\bar{T} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}} A \int_0^\infty e^{-iAx^2} dx$$

Таким образом, оператор $T$ существует как оператор в действительном банаховом пространстве. Обозначив $T = \sqrt{A}$, определим преобразование типа Фурье формулами[x)] (1.19) – (1.20) для функций со значениями в $B$.

Можно также рассматривать оператор $A$, такой, что $-A$ обладает перечисленными выше свойствами. В этом случае в качестве преобразования типа Фурье введем формулу (1.21)

5°. Инвариантность типа уравнения относительно перехода к $p$ - представлению.

Тип уравнения (1.16) инвариантен относительно перехода к $p$ - представлению с помощью преобразования $\Phi_A^{x_n}$.

---

x/ Определение корня необходимо для придания смысла оператору $A^{n/2}$ при помощи равенства $A^{n/2} = T^n$

В самом деле, после подстановки $e^{iAS(p,t)}$ в уравнение $(1.16)$, записанное в $p$ - представлении (т.е. в уравнение для функции $\tilde{\psi}(p,t)$ ), мы получим, приравняв коэффициент при $A^2$ нулю, вновь уравнение Гамильтона-Якоби:

$$a_1(x,t)\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\right)^2 + a_2(x,t)\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} - a_3(x,t) + |p + b(x,t)|^2 = 0,$$

где $\tilde{S} = S(p,t)$, $x_i = \dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial p_i}$

$6^\circ$. Уравнения волновой механики и оптики.

I. Приведем таблицу специальных значений коэффициентов уравнения $(1.16)$, при которых из него получаются уравнения волновой механики и оптики. Заметим, что большая часть конкретных применений развиваемой далее теории относится именно к этим уравнениям. Нетрудно проверить, что все они принадлежат к волновому типу в смысле проведенной перед этим классификации.

Табл. 1.

| | Общепринятое обозначение для решения $\psi$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b$ | $B_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$ | $R$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Уравнение Скалярное волновое | $u$ | $1/c^2(x,t)$ -скорость света в веществе | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $i\frac{\partial}{\partial\tau}$ или |
| Максволла | $\bar{E}$ $\bar{H}$ | $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}$ | 0 | 0 | 0 | $(\mathrm{grad}\ \ln\mu)\,\mathrm{rot}\,\bar{E}+$ $+\mathrm{grad}(\bar{E}\ \mathrm{grad}\ \ln\varepsilon)$ $(\mathrm{grad}\ \ln\varepsilon)\,\mathrm{rot}\,H+$ $+\mathrm{grad}(\bar{H}\ \mathrm{grad}\ \ln\mu)$ | 0 | $i\frac{\partial}{\partial\tau}$ *) или $\omega$ |
| Дирака | $\psi$ | 1 | $2\Phi_0$ | $\Phi_0^2+m^2c^2$ | $A_\mu$ $\mu=1,2,3$ | 0 | $\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\frac{e}{c}\{(\bar{\sigma}\bar{H})-i(\bar{\alpha},\bar{E})$ | $\frac{1}{h}$ |
| Кляйна-Гордона-Фока | $\psi$ | 1 | $2\Phi$ | $\Phi_0+m^2c^2$ | $A_\mu$ $\mu=1,2,3$ | 0 | $\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}$ | $\frac{1}{h}$ |
| Паули | $\psi$ | 0 | 1 | $\Phi_0$ | $A_\mu$ $\mu=1,2,3$ | 0 | $e(\bar{\sigma}_2,\bar{H})$ | $\frac{1}{h}$ |
| Шредингера | $\psi$ | 0 | 1 | $\Phi_0$ | $A_\mu$ $\mu=1,2,3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{h}$ |

x/ См. конец этого параграфа

Здесь $\bar{E}=\bar{E}(x,t)$ - электрическое поле, $H=H(x,t)$ магнитное поле. $\Phi_0=\Phi_0(x,t)$ - скалярный потенциал, $A_\mu=A_\mu(x,t)$, $\mu=1,2,3$ компоненты векторного потенциала, $\varepsilon=\varepsilon(x,t)$, $\mu=\mu(x,t)$ диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, $c$ - скорость света в пустоте, $m$ - масса частицы, $e$ - заряд, [13] $h$ - постоянная Планка, $\bar{\sigma}_2$ - матрицы Паули второго порядка: $\sigma_2=(\sigma_{21},\sigma_{23},\sigma_{24})$

$$\sigma_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\quad \sigma_{22}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix};\quad \sigma_{23}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$\bar{\sigma},\bar{\alpha}$ - матрицы Дирака четвертого порядка [40] :

$$\bar{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\qquad \bar{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$$

$$\alpha_k=\begin{pmatrix}0&\sigma_{2k}\\\sigma_{2k}&0\end{pmatrix}\qquad \sigma_k=\begin{pmatrix}\sigma_{2k}&0\\0&\sigma_{2k}\end{pmatrix}$$

2. Кроме того, если $a_1=a_2=0$, $b=0$, $B_k=0$, $R=0$ то мы имеем уравнение Гельмгольца. При $A=\omega$ имеем уравнение тун**н**ельного типа с чисто мнимыми характеристиками: если сделать замену $S\to iS'$, то мы получим, действительные решения для $S'$. Характеристическую систему для уравнения, определяющего $S'$ мы будем называть бихарактеристической для данного тунельного уравнения.

3. Уравнение (1.4) получается из (1.16), если положить

$$a_1=\frac{1}{a^2(x,t)},\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{b^2(x,t)}{a^2(x,t)},\quad A=-\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а остальные коэффициенты уравнения (1.16) положить равными нулю.

4. Начальные данные для уравнений 2 и 3 таблицы I (уравнения Максвелла и Дирака) не являются произвольными, а удовлетворяют определенным соотношениям. Эти соотношения обладают свойством инвариантности, т.е. если они выполнены в начальный момент, то решение уравнений будет удовлетворять им в любой момент времени.

Пусть $\bar{E}(x,0)=\bar{E}_0(x)$, $\bar{H}(x,0)=\bar{H}_0(x)$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}(x,0)=\bar{E}_0(x), \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(x,0)=\bar{H}_0'(x) \; -$$

начальные условия решения уравнения Максвелла (п. 2 таблица I). Указанные соотношения между ними имеют вид:

$$\operatorname{div} \varepsilon \bar{E}_0=0 \qquad \operatorname{div} \mu \bar{H}_0=0 \qquad Ia$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\bar{E}_0'=\operatorname{rot}\bar{H}_0 \qquad \frac{\mu}{c}\bar{H}_0'=-\operatorname{rot}\bar{E}_0 \qquad I\text{в}$$

Пусть решение $\psi(x,t)$ уравнений Дирака удовлетворяют условиям

$$\psi(x,0)=\psi_0(x) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)=\psi_0'(x)$$

Соотношения, наложенные на эти условия, имеют вид

$$\frac{ih}{c}\psi_0'+\frac{e}{c}\Phi(x,t)\psi_0=-ih\left(\bar{\alpha},\left(\operatorname{grad}\psi_0-\frac{e}{c}A\psi_0\right)\right)+mc\alpha_4\psi_0$$

$$\alpha_4=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку соотношения I и II инвариантны и выполняются в любой момент времени $t$, то можно записать уравнения Дирака и Максвелла, как это обычно принято, в виде системы уравнений первого порядка. При этом условия Ia можно наложить непосредственно на решения уравнения Iв.

5. Заметим, что скалярное волновое уравнение и уравнение Максвелла вообще не зависят от оператора $A$. Тем не менее, начальное условие может зависеть от оператора $A$. Действительно, в первом примере (1.1) начальное условие (1.2) может быть представлено в виде $u(x,0) = \varphi(x) f^{+}(x) = \varphi(x)\left[\xi + f(x)\right]^{+}_{\xi=0} = \varphi(x)\left[e^{f(x)\frac{d}{d\xi}} \xi^{+}\right]_{\xi=0}$

Таким образом, здесь $u(x,0) = e^{-iAf(x)}g$,

где $A = i\frac{\partial}{\partial\xi}$, а $g = \xi^{+}$

Кроме того, может быть поставлено "осциллирующее" начальное условие:

$$u(x,0) = \varphi(x)\, e^{i\omega f(x)}$$

(т.е. $g = 1$, $A = \omega$)

Во всех рассмотренных примерах начальные условия зависят от $A$ специальным образом. Мы увидим в следующем параграфе, что специальный вид начальных условий не случаен. Он продиктован самой физической постановкой задачи.

## § 2. Постановка задачи Коши для уравнений квантовой механики.

Квантовая механика, как известно, основывается на целом ряде физических принципов. Не будем касаться тех из них, которые постулируют связь математического аппарата с экспериментом. Не будем касаться также и правил, служащих для написания уравнений.

Весь известный математический аппарат квантовой механики может быть построен на основе нескольких эволюционных

(нестационарных) уравнений в частных производных, приведенных в таблице I. Поэтому, чтобы аксиоматизировать математическую теорию квантовой механики, надо еще знать, каким условиям должны удовлетворять начальные значения решений этих уравнений. Итак, мы сформулируем лишь те постулаты квантовой механики, которые могут быть использованы для определения вида начальных условий. Такими постулатами являются принцип "тождественности частиц" и принцип "соответствия квантовой и классической механик". Им удовлетворяют далеко не все решения уравнений, отвечающие произвольным начальным данным, принадлежащим $L_2$

1. Сформулируем аксиому, которой может быть заменен принцип "тождественности".

<u>Пусть уравнение Шредингера зависит от двух троек переменных $x_1, y_1, z_1$ и $x_2, y_2, z_2$ так, что при перестановке индексов уравнение не изменяется. Тогда начальное условие при перестановке индексов может изменить только знак.</u>

Нетрудно доказать, что решение уравнения будет обладать этим свойством не только в начальный момент, но и в любой момент времени $t$ . Это и означает выполнение принципа "тождественности" в общепринятой формулировке.[47],[87]

2. Другое ограничение, сказывающееся на начальных условиях формулируется следующим образом в книге Л.Шиффа "Квантовая механика" : "Мы всегда будем требовать, чтобы при соответствующем предельном переходе результаты любых вычислений совпадали с классическими выражениями. Это требование выражает принцип соответствия Бора"...[87]

3. Поясним, что означает термин "предельный переход".

Пусть $\ell_0, t_0, v_0 = \ell_0/t_0, V_0$ постоянные длина, время, скорость и потенциал, характерные для данной квантовой системы. Предельный переход квантовомеханических величин в классические осуществляется при таком изменении этих параметров, когда безразмерная константа

$$\nu = \frac{h}{\ell_0 m v_0}$$

стремится к нулю. Это означает, что т.н. де-Бройлевская длина волны $h/m v_0$ мала сравнительно с характерной длиной системы. Остальные безразмерные параметры

$$\eta = \frac{c}{v_0}, \quad \varkappa = \frac{e V_0}{m v_0^2}$$

( $c$ - скорость света, $e$ - заряд, $V_0$ - характ.потенциал) не зависят от $h$ и $\ell_0$. А поскольку $h$ постоянно то $\nu$ может стремиться к нулю лишь за счет увеличения $\ell_0$ (или если $V_0$ и $v_0$ одновременно стремятся к $\infty$, причем $eV_0 \sim v_0^2 m$ ). Однако, для удобства обычно полагают, что $h \to 0$ вместо $\nu \to 0$ или $\ell_0 \to \infty$

Таким образом, принцип соответствия может быть применен лишь к системам, которые содержат малый параметр $h$. Этим он отличается от принципа тождественности.

4. Теперь разберемся, о какой задаче классической механики идет речь.

Всякой конкретной квантовомеханической задаче, содержащей параметр $h$ и имеющей физический смысл, соответствует в классической механике вполне определенная задача. Эта задача может быть поставлена как обычная вариационная: ищутся экстремали функционала с закрепленным правым концом, левый конец

которого трансверсален к некоторому $k \le n$ мерному многообразию (в частности при $k=0$ закреплен).

Рассмотрим, например, уравнение Шредингера. Уравнениями Эйлера для классической вариационной задачи соответствующей ему будут являться уравнения Ньютона

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad i=1,\dots,n$$

Рассмотрим $k$ - мерное многообразие $x_0 = x_0(\alpha)$, $\alpha = \alpha_1,\dots,\alpha_k$

$k \le n$ , вложенное в $R^n$ . Обобщение условия трансверсальности может быть представлено в виде [53]

$$\frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \dot{x}_0(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_j}\frac{\partial \dot{x}_0(\alpha)}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i,j \le k \qquad (2.1)$$

$$P_0(\alpha) = \mu \dot{x}_0(\alpha)$$

Удобнее рассматривать в фазовом пространстве $q = x$, $p = \mu\dot{x}$ $n$ -мерное неособое дифференцируемое многообразие $q = q(\alpha)$, $p = \mu\dot{q}(\alpha)$, $\alpha = \alpha_1,\dots,\alpha_n$. Условие ( 2.1 ) можно переписать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial q}{\partial \alpha_j}\frac{\partial p}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i,j \le n \qquad (2.2)$$

т.е. в любой локальной системе координат многообразия скобки Лагранжа равны нулю. Такое многообразие называется лагранжевым.

4.I. Квантовый переход системы из состояния $\psi_1(x)$ при $t=0$ в состояние $\psi_2(x)$ при $t=\tau$ описывается формулой

$$C_{12}(\tau) = \int \psi_2(x)\, K(x,\xi,\tau)\, \psi_1(\xi)\, dx\, d\xi \qquad (2.3)$$

где $K(x,\xi,\tau)$ - фундаментальное решение (функции Грина)

13$^{x}$-1419

уравнения Шредингера $(1.6)$

Вероятность этого перехода равна $|C_{12}(\tau)|^2$

Решение задачи Коши для $(1.6)$ получается из формулы $(2.3)$, если положить $\psi_2(x)=\delta(x-x')$, что соответствует задаче с закрепленным правым концом.

Само фундаментальное решение можно получить из этой формулы, положив $\psi_1(x)=\delta(x-\xi'),\ \psi_2(x)=\delta(x-x')$ Следовательно, фундаментальное решение описывает квантовый переход частицы из точки $x=\xi'$ за время $\tau$ в точку $x=x'$, что соответствует вариационной задаче с закрепленными концами.

Начальное лагранжево многообразие в этом случае имеет вид $x=\xi'$ и представляет поверхность, параллельную координатной плоскости $x=0$.

Начальному условию вида

$$\psi(x,0)=exp\left(\frac{ip_0x}{h}\right)$$

( $p_0=p_{01},\dots,p_{0n}$ - константы) соответствует лагранжево многообразие $p=p_0$. Условию, не зависящему от $h$, - многообразие $p=0$.

5. С помощью принципа соответствия Бор получил квантование классической механики, которое, как оказалось, дает лишь первый член асимптотики при $h\to 0$ решения истинного квантового уравнения Шредингера $(1.6)$ Квантование Шредингера заключалось в том, что он поставил в соответствие классическому импульсу оператор $-ih\frac{\partial}{\partial x}$, энергии $E$ оператор $ih\frac{\partial}{\partial t}$, тем самым сопоставив уравнению Гамильтона - Якоби линейное уравнение в частных производных

второго порядка. Квантование, таким образом, тесно связано с принципом соответствия. Принцип соответствия в вышеприведенной формулировке Шиффа есть понятие обратное квантованию. Квантование ставит в соответствие классическому объекту квантовый объект, зависящий от $h$, а принцип соответствия требует, чтобы результаты вычисления имели бы классический предел при $h \to 0$. Естественно, что принцип соответствия был призван "помогать квантовать".

Оказывается, однако, что принцип соответствия вообще говоря, не выполняется для произвольного решения уравнения Шредингера.

Например, пусть $\psi(x,t)$ решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее начальному условию $\psi(x,0)=\varphi(x)\exp\left(\frac{ix}{h^2}\right)$ тогда среднее значение импульса, равное (см. [87])

$$-\int \bar{\psi}(x,t)\, ih \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t)\, dx$$

будет стремиться к бесконечности при $h \to 0$. Значит, для того, чтобы удовлетворить принципу соответствия нужно прежде всего проквантовать начальное условие для уравнений Ньютона - условие трансверсальности, т.е. каждому лагранжеву многообразию поставить в соответствие некоторую функцию от $x$ и $h$ - начальное условие для решения уравнения Шредингера (иначе говоря, проквантовать скобки Лагранжа $(2.2)$). И лишь после этого доказать принцип соответствия.

6. Итак, задача заключается в том, чтобы найти класс $K$ функций от $x$ и $h$, удовлетворяющий следующим условиям:

I. <u>Асимптотичность.</u> Две функции от $x$ и $h$ из $K$ считаются эквивалентными, если их разность стремится к нулю при $h \to 0$ в среднем (т.е. по норме в $L_2[R^n]$ ).

2. Выполнение принципа соответствия. Если в начальный момент решение принадлежит классу $K$, то в любой момент выполняется принцип соответствия, т.е. все квантовомеханические величины, имеющие физический смысл переходят при $h \to 0$ в классические.

3. Инвариантность. Если в начальный момент решение $\psi(x,0)$ принадлежит классу $K$, то и в любой фиксированный момент оно принадлежит этому же классу.

4. Полнота.

Каждому многообразию вида $x_0 = x_0(\alpha)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_0(\alpha)$ удовлетворяющему условию (2.2) соответствует функция $\varphi_0 \in K$. Квантовомеханические величины, отвечающие решению $\psi(x,t)$ уравнения (1.6), такому, что $\psi(x,0) = \varphi_0$, сходятся при $h \to 0$ к классическим величинам, отвечающим задаче

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad x_i(0) = x_{0i}(\alpha), \quad \dot{x}_i(\alpha) = p_{0i}(\alpha) \qquad (2.4)$$

6.1 Таким образом для наших целей достаточно провести квантование скобок Лагранжа в квазиклассическом приближении - приближении старой кванровой механики Бора. Забегая вперед, заметим, что условия квантования скобок Лагранжа будут совпадать с условиями Бора-Зоммерфельда старой квантовой теории в случае, когда лагранжево многообразие является инвариантным относительно динамической системы (2.4).
Свойство асимптотичности для класса $K$ мы заменим более сильным условием, - учитывающим "равноправность" оператора умножения на $1/h$ и оператора дифференцирования по $x$

Мы рассмотрим в пространстве $L_2(R^{n+1})$ область $D$, равную пересечению областей определения оператора умножения на $1/h$ и оператора дифференцирования по $x$. Область $D$ не замкнута в норме $L_2[R^{n+1}]$. Отождествим между собой элементы $L_2[R^{n+1}]$, разность между которыми принадлежит $D$. Полученное таким образом пространство (фактор-пространство x/ ) обозначим через $S = L_2/D$. Требование асимптотичности будет выполнено, если класс $K$ принадлежит $S$. В дальнейшем мы будем обозначать знаком $f_1 \underset{S}{=} f_2$ равенство в пространстве $S$, т.е. равенство с точностью до элемента, принадлежащего $D$. Так, например, $\psi(x,t) \underset{S}{=} \psi_0(x,t)$

7. Задача о построении инвариантного класса функций может быть поставлена и для разрывах задачи о скалярного волнового уравнения. Если рассматривать решение задачи $(1.1)$ при $t > t_0$, то якобиан $Y(t, x_0)$ может обра-

---

x/ Пространство $L_2[R^n]$ является группой по сложению, $D$ – является его подгруппой. Пусть $L_2/D$ класс смежности в $L_2$ по подгруппе $D$. Совокупность классов смежности и является фундаментальным множеством элементов линейного пространства $S$. Фактор-пространство $L_2/D$ не замкнуто.

титься в нуль в некоторой точке $t=t'$. При $n=2$ для аналитических коэффициентов уравнения $(1.1)$ в простейшем случае (простая каустика) было исследовано поведение разрыва в точке $t=t'$. Оказалось, [6, 2), 3)] что разрыв решения описывается весьма сложным интегралом.

Вопрос заключается в том, чтобы сконструировать инвариантный класс разрывов $K$, т.е. такой класс, что если $\psi(x,0)\in K$, то и $\psi(x,t)\in K$ в любой момент времени $t$. Таким образом, здесь идет речь, в частности, о решении задачи $(1.1)$ в целом для любого времени $t$.

8. Рассмотрим пространство $L_2[R^n; H]$ функций от $x_1,\dots,x_n\in R^n$ со значениями в гильбертовом пространстве $H$ (см. §1 гл 2 /часть I/). Пусть $A$ - самосопряженный оператор в $H$, а область $D(A^N)$ плотна в $H$, при любом $N$. Будем рассматривать в $L_2[R^n; H]$ обобщенные функции в смысле пункта $(1.41)$, т.е. функции вида $A^N f(x)$ где $f(x)\in L_2[R^n; H]$. Как указывалось в $(1.41)$ не уменьшая общности можно рассматривать

$$f(x)\ \overline{\in}\ D(A)$$

Поэтому, оставаясь в пространстве $L_2[R^n; H]$ мы выделим класс функций, не принадлежащий к пересечению областей определения оператора $A$ и операторов $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $i=1,\dots,n$ и в дальнейшем все результаты будем форму-

лировать для функции из пространства $L_2[R^n; H]$.
Если на эти функции подействовать оператором $A^N$, или $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^N$, то мы придем к обобщенным функциям.

Все теоремы гл. 2 переносятся очевидным образом на обобщенные функции, поэтому в части примеров, служащих для иллюстрации теорем, мы будем использовать именно обобщенные функции. Для выделения "сингулярной части" функции $f(x) \bar{\in} D$ рассмотрим фактор пространство $S = L_2[R^n; H] / D$ т.е. отождествим между собой элементы пространства $L_2[R^n; H]$ разность между которыми принадлежит

$$D = D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cap D(A).$$

Для общего уравнения (1.16) задача также заключается в том, чтобы сконструировать класс $K \subset S$ инвариантный относительно уравнения (1.16), т.е. такой класс, что если $\psi(x,0) \in K$, то и $\psi(x,t) \in K$ для любого времени $t$.

## § 3. Общее определение характеристик для уравнения с операторными коэффициентами.

I. Пусть $\mathcal{H}(B)$ - некоторое банахово пространство функций от $x=(x_1,\dots,x_n)$ со значениями в абстрактном банаховом пространстве $B$ (например, $C^N(B)$ ,или $W_p^N(B)$).

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}'(B)$ с нормой

$$\| g(x) \|_{\mathcal{H}'(B)} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{H}(B)} + \| g(x) \|_{\mathcal{H}(B)}$$

Обозначим через $S$ фактор-пространство

$$\mathcal{H}(B) / \mathcal{H}'(B).$$

Пусть $L$ линейный ограниченный оператор из банахова пространства $\mathcal{H}_1(B_1)$ в банахово пространство $\mathcal{H}_2(B_2)$ Предположим, что $L$ отображает $\mathcal{H}_1'(B)$ в $\mathcal{H}_2'(B_2)$. Пусть $S_1 = \mathcal{H}_1(B_1)/\mathcal{H}_1'(B_1)$, $S_2 = \mathcal{H}_2(B_2)/\mathcal{H}_2'(B_2)$. Оператор $L$ , порождает, очевидно, линейный оператор из фактор-пространства $S_1$ в фактор пространство $S_2$ . Назовем оператор $L_S$ порожденный $L$ , действующий из фактор-пространства $S_1$ в фактор пространство $S_2$ , характеристическим оператором. Пусть для некоторой функции $\chi(x_1) \in S_1$ , зависящей лишь от одного аргумента $x_1$ уравнение $L_S \chi(\varphi(x)) = 0$ удовлетворяется в том и только в том случае, когда $\varphi(x) \in C^1$ удовлетворяет некоторому уравнению типа Гамильтона-Якоби.

Тогда будем говорить, что оператор $L$ имеет характеристики, а уравнение первого порядка для определения функции $\varphi(x)$, $x = x_1, \dots, x_n$ назовем характеристическим. Характеристическое уравнение у оператора $L$ может быть, вообще говоря, и не одно.

В том случае, когда оператор $L$ является гиперболическим оператором $K$-того порядка из $C^K$ в $C$, данное определение характеристик совпадает с общепринятым.

2. Пусть $iA$ - некоторый неограниченный оператор в $B$, порождающий группу.

Если вышеуказанная функция $\chi(x_1)$ имеет вид

$$\chi_g(x_1) = e^{iAx_1} g,$$

где $g \in B$, причем характеристическое уравнение не зависит от $g$, то это уравнение мы будем называть $A$ - характеристическим. и будем говорить, что оператор $L$ имеет $A$ - характеристики. Если сверх того характеристическое уравнение имеет один и тот же вид для всех неограниченных операторов $iA$, порождающих группу, то будем называть его сильно-характеристическим и говорить, что оператор $L$ имеет сильные характеристики. Легко видеть, что классические характеристические уравнения для гиперболических систем являются сильно-характеристическими, если полагать, что решение уравнения есть функция со значениями в некотором банаховом пространстве $B$ (например, зависит от некоторого параметра)

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x) \Delta u$$

уравнение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2(x)(\nabla S)^2 \qquad (3.1)$$

является сильно характеристическим, а

уравнение

$$c^2(x)(\nabla S)^2 = 1 \qquad (3.2)$$

является $\frac{\partial}{\partial t}$ - характеристическим. Если начальное условие для уравнения $(3.1)$ удовлетворяет уравнению $(3.2)$, то сильные характеристики в данном случае будут совпадать с $\frac{\partial}{\partial t}$ - характеристиками.

Перейдем теперь к конструктивному определению А-характеристик

3. Пусть $\mathcal{L}(x,p,t,h)$ — самосопряженный (неограниченный, вообще говоря) оператор в гильбертовом пространстве $H$, зависящий от параметров $x, p, h$ и $t$, $x = x_1, \ldots, x_n$,

$$p = p_1, \ldots, p_n, \quad 0 \le |x| \le \infty, \quad 0 \le |p| \le \infty, \quad 0 \le t \le t_0, \quad 0 \le h$$

и бесконечно-дифференцируемый по всем этим параметрам. Пусть $\lambda(x,p,t)$ изолированная равномерно по всем параметрам точка спектра оператора $\mathcal{L}(x,p,t,0)$

Пусть $L_2[R^{n+1}, H]$ — пространство функций от $x = x_1, \ldots, x_n$ и $h$ со значениями в $H$.

Норма $\mathcal{F}(x,h) \in L_2[R^{n+1}, H]$ равна

$$\|\mathcal{F}\|_{L_2[R^{n+1}; H]} = \sqrt{\int_0^{h_0} dh \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}(x,h)\|_H^2 \, dx}$$

Рассмотрим в $L_2[R^{n+1}, H]$ оператор вида

$$\mathcal{L}(x, \hat{p}, t, h),$$

где $\hat{p}_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j}$, а $t$ - параметр, причем в операто-

ре $\mathcal{L}$ вначале действует $\hat{p}_j$, потом $x_j$, иначе говоря,

$$\mathcal{L}(x,\hat{p},t,h)\,\mathcal{F}(x,h)=\frac{1}{(2\pi i h)^n}\int_{-\infty}^{\infty}dp\, e^{\frac{-ipx}{h}}\mathcal{L}(x,p,t,h)\int e^{\frac{ip\xi}{h}}\mathcal{F}(\xi,h)\,d\xi$$

Рассмотрим в пространстве непрерывных функций от $t$ со значениями в $L_2[R^{n+1},H]$ оператор

$$ih\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{L}(x,\hat{p},t,h) \qquad (3.3)$$

Для этого оператора одно из $i/h$ характеристических уравнений имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\lambda\left(x,\frac{\partial S}{\partial x},t\right)=0 \qquad (3.4)$$

Оно отвечает собственному значению $\lambda(x,p,t)$

Вместо $1/h$ в этом примере можно взять резольвенту самосопряженного оператора $A$, действующего в пространстве $L_2$ функций от $\tau$. При этом норма $\mathcal{F}(x,\tau)\in L_2[R^{n+1},H]$ должна иметь вид:

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(x,\tau)|^2dx}$$

Уравнение $(3.4)$ будет тогда $iA$ - характеристическим для оператора $(3.3)$, где $h=(A-z)^{-1}$, $z\in\rho(A)$, ($\rho(A)$ – резольвентное множество оператора $A$).

Это определение $iA$ характеристик, как мы покажем ниже согласуется с определением данным выше.

4. В этом пункте мы дадим общее конструктивное определение характеристик для дифференциальных уравне-

ний с операторными коэффициентами; с помощью этого определения дадим классификацию уравнений.

Рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{L}$ с всюду плотной областью определения, лежащей в гильбертовом пространстве $H$ и областью значений, лежащей там же, зависящий от $2n+3$ параметров $p_1, \dots, p_n,\ p_0,\ x_1, \dots, x_n,\ t,\ \omega$ и являющийся полиномом $m$-ой степени параметра $p_0$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(i\omega p,\ i\omega p_0,\ x,\ t,\ \omega) = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{L}_j(i\omega p, x, t, \omega)(i\omega p_0)^j \tag{3.5}$$

Предположим, что существует сильный предел

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^{\ell} \mathcal{L}(i\omega p, i\omega p_0, x, t, \omega) = \mathcal{L}^0(p, p_0, x, t) = \sum_{i=0}^{m} \mathcal{L}_i^0(p, x, t) p_0^i, \tag{3.6}$$

где $\ell$-некоторое действительное число.

Пусть точка $\lambda(p, p_0, x, t)$ является равномерно по всем параметрам $a \le p \le b$, $\alpha \le x \le \beta$, $c \le p_0 \le d$, $0 \le t \le T$ изолированной точкой спектра[x] операторов $\mathcal{L}^0(p, p_0, x, t)$ и $[\mathcal{L}^0(p, p_0, x, t)]^*$ кратности $r \le \infty$

Пусть $A$ - некоторый неограниченный самосопряженный оператор в $H$, коммутирующий с оператором $\mathcal{L}$.

Рассмотрим в пространстве бесконечно дифференцируемых функций от $x$ и $t$ со значениями в $H$ оператор $\hat{\mathcal{L}}$ вида

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right) = \sum_{i=0}^{m} \mathcal{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i =$$

---

x/ Функцию $\lambda(p, p_0, x, t)$ будем называть термом.

$$=\sum_{i=0}^{m} \hat{\mathcal{L}}_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j, \tag{3.7}$$

где операторы $\hat{\mathcal{L}}_j$ действуют следующим образом

$$\hat{\mathcal{L}}_j = \mathcal{L}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right) = \frac{A^n}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipxA} \mathcal{L}_j(-ip, x, t, A)\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi A} \varphi(\xi, t)\, d\xi \tag{3.8}$$

Уравнение

$$\lambda(p, p_0, x, t) = 0 \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad p_0 = \frac{\partial S}{\partial t} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$a \leq p \leq b; \quad c \leq p_0 \leq d; \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad 0 \leq t \leq T$$

будем называть характеристическим уравнением (одним из характеристических, поскольку изолированных точек спектра у оператора $\hat{\mathcal{L}}$ может быть много) для уравнения

$$\hat{\mathcal{L}}\, \psi(x,t) = \mathcal{F}(x,t) \tag{3.9}$$

$$\psi(x,t), \quad \mathcal{F}(x,t) \in C^{\infty}[H]$$

Если уравнение имеет $m$ действительных корней относительно $p_0$, то мы будем говорить, что уравнение (3.9) имеет характеристику волнового типа. Если все $m$ корней $p_0$ чисто мнимы - то характеристику туннельного типа.

Мы увидим из дальнейшего, что приведенное конструктивное определение $A$ - характеристик совпадает с определением, данным в начале этого параграфа (см. теоремы 4.1а. и 4.2) Нетрудно убедиться, что определение характеристик, данное в примерах § I следует из приведенного здесь общего определения.

## § 4. Проблема выбора представления при переходе из квантовой механики в классическую.

1. В предыдущей части мы изучали семейство операторов $A_\varepsilon$, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к оператору $A_0$, и строим теорию возмущений в каком-либо обобщенном смысле для оператора $A_0$. Мы, однако, отмечали с самого начала в гл. 1 § 1 п. 2° бессмысленность такой постановки в общем случае, если заранее из каких- либо априорных (например, физических) соображений не следует, что именно оператор $A_0$ является предельным. В противном случае мы могли бы перейти к какому-либо другому представлению $\widetilde{A}_\varepsilon$ оператора $A_\varepsilon$ с помощью унитарного преобразования, зависящего от $\varepsilon$, и тогда пределом $\widetilde{A}_\varepsilon$, возможно, был бы некоторый другой оператор $\widetilde{A}_0 \neq A_0$.

2. Рассмотрим, например, стационарное уравнение Шредингера:

$$-\frac{h^2}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + v(x)\psi = \lambda\psi \qquad v(0) = 0 \qquad (4.1)$$

Известно, что при $h \to 0$ квантовая механика должна переходить в классическую. Нам важно было бы получить в первом приближении классическую величину, а дальше квантовые поправки к ней. Оператор Шредингера

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$$

сходится при $h \to 0$ к оператору умножения на $v(x)$

Выше уже говорилось, что собственные функции этого оператора можно нормировать так, что при $h \to 0$, $\lambda_h \to \lambda$ они будут сходиться (как обобщенные функции) к линейным комбинациям собственных функций оператора умножения на $v(x)$ ($\delta$ - функциям).(см 3, §2, 4°/пример/)

Перейдем в этом операторе к Фурье - представлению (импульсному представлению), тогда

$$\frac{p^2}{2}\psi(p) + v\left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi(p) = \lambda\psi(p) \qquad (4.2)$$

Оператор $\hat{H}$ в этом представлении будет сходиться к оператору умножения на $p^2/2$. Собственные функции будут сходиться к комбинациям $\delta(p-\sqrt{2\lambda})$ и $\delta(p+\sqrt{2\lambda})$

Обе эти задачи никакого отношения к исходной не имеют. Нам нужно получить такое представление оператора $\hat{H}$, в котором квантовые величины переходили бы в классические при $h \to 0$. В частности, оператор полной энергии $\hat{H}$ переходил бы в пределе в полную классическую энергию, а не в потенциальную, как в случае $(4.1)$ или кинетическую в случае $(4.2)$

3. Прежде всего обратимся к классической механике. Пусть дан уровень энергии $E$ и потенциальная энергия $v(x)$. Рассмотрим динамическую систему на уровне энергии $E$.

$$\frac{dx}{d\tau} = p \qquad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{p^2}{2} + v(x) = E$$

Отсюда $\quad \tau = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}$

Очевидно, что расстояние $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ не будет менятся при инвариант^ном^ сдвиге вдоль траектории. Поэтому возьмем в качестве инвариантной меры относительно сдвига вдоль траектории по времени величину $d\tau = \frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}$

Пусть $\tilde{L}_2$ — гильбертово пространство функций от $\tau$ с нормой: $\|f\|^2 = \int\limits_0^T f^2(\tau)\,d\tau$,

где $T$ - полупериод: $T = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}$

Точки $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $E = v(x)$ (точки "поворота"). Следовательно

$$\|f\|^2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} f^2(\tau(x)) \frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}$$

Унитарным оператором $Q_t$ динамической системы будет сдвиг по времени: $Q_t f(\tau) = f(\tau + t)$.

Соответствующий ему самосопряженный оператор будет иметь вид $i\frac{d}{d\tau}$.

Пусть $v(x)$ - ограничена: $|v(x)| < 1$, а $E > 1$.

При этом уравнение $v(x) = E$ корней иметь не будет, и интегралы в $\tilde{L}_2$ нужно брать от $-\infty$ до $+\infty$.

Введем унитарный оператор $S(t)$, отображающий $\tilde{L}_2$ на $L_2$.

В качестве такого оператора возьмем оператор умножения на функцию

$$\left(2(E-v(x))\right)^{+1/4} \cdot \exp\left\{-\frac{i}{h}\left[\int^{x} \sqrt{2(E-v(x))}\,dx - Et\right]\right\}$$

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x) \in L_2$, тогда $S^{-1}(t) f_1(x)$ и $S^{-1}(t) f_2(x) \in \tilde{L}_2$,

причем
$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) f_2(x)\, S^*(t) f_1(x) \frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Отсюда следует, что действительно оператор $S(t)$ унитарно отображает $\tilde{L}_2$ на $L_2$.

Оператор $\hat{H}$ в новом представлении имеет вид
$$\tilde{H} = S(t) \hat{H} S^{-1}(t) = E - ih\frac{d}{d\tau} - \frac{h^2}{2}\sqrt[4]{2(E-v(x))}\,\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{2(E-v(x))}}$$
и является оператором в $\tilde{L}_2$.

Таким образом, мы видим, что при $h \to 0$ в первом приближении оператор $\tilde{H}$ в "квазиклассическом" представлении переходит в полную энергию $E$.

Во втором приближении оператор $\tilde{H}$ переходит в самосопряженный оператор классической динамической системы.

Унитарный оператор $e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}$ в квазиклассическом представлении имеет вид
$$S(t)\, e^{\frac{i}{h}\hat{H}t} S^{-1}(0) = e^{\frac{i}{h}\{S(t)\hat{H}S^{-1}(t) - E\}t} =$$
$$= e^{i\left(-i\frac{d}{d\tau} - \frac{h}{2}\sqrt[4]{(E-v(x))}\,\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{2(E-v(x))}}\right)t}$$

Отсюда в силу теоремы 4.4 ч.1
$$S(t)\, e^{\frac{i}{h}\hat{H}t} S^{-1}(0) \to e^{t\frac{d}{d\tau}} = Q_t$$

Таким образом, унитарный оператор Шредингера $e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}$ сходится в квазиклассическом представлении к унитарному оператору динамической системы. Кроме того в квазиклассическом представлении решение уравнения

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v(x)\psi$$

может быть представлено в силу теоремы 3.6 в виде асимптотического ряда по степеням $h$.

4. Решение уравнения Шредингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + v(x)\psi \qquad x = x_1,\dots,x_n$$

полученное в §1 (см. 1.12) можно получить с помощью теории возмущений, если перейти к квазиклассическому представлению.

Пусть существует $n$ - параметрическое семейство решений $x(\alpha, t)$ $(\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n))$

уравнений Ньютона

$$\mu\ddot{x}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad i = 1,\dots,n$$

После замены

$$\psi = \varphi\sqrt{Y}\,e^{\frac{i}{h}S},$$

где $Y$ - якобиан от $\alpha$ к $x$ $\left(Y = \frac{\partial(\alpha_1\dots\alpha_n)}{\partial(x_1\dots x_n)}\right)$,

а $S$ - некоторая функция, играющая в механике роль действия, уравнение Шредингера приводится к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{grad}\,S\,\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{ih}{2\mu}Y^{-1/2}\Delta(Y^{1/2}\varphi)$$

Здесь левая часть есть производная по времени вдоль клас-

сической траектории. При $h=0$ решение уравнения будет постоянно вдоль классической траектории. В этом представлении оператор $exp(\frac{i}{h}\hat{H}t)$ также переходит при $h\to 0$ в оператор сдвига вдоль классической траектории. Это следует из теоремы 3.2 г. 1

Если перейти к переменным $\alpha$ и $t$, то

$$\psi(x,t)=\psi(x(\alpha,t),t)=\tilde{\varphi}(\alpha,t)$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=\frac{ih}{2\mu}Y^{-1/2}\Delta_{\alpha}\left(Y^{1/2}\tilde{\varphi}(\alpha,t)\right), \qquad (4.3)$$

где $\Delta_\alpha$ - оператор Лапласа в координатах $\alpha$. Преобразование, переводящее $\psi(x,t)$ в $\tilde{\varphi}(\alpha,t)$ унитарно, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\varphi}(\alpha,t)|^2d\alpha$$

Оно осуществляет переход от координатного представления к квазиклассическому. К уравнению $(4.3)$ мы можем применить теорию возмущений.

Такое представление возможно, вообще говоря, лишь в малом (при достаточно малом $t$ ) и то при условии, что

$$\left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leq C$$

Подробно на квазиклассическом представлении в малом мы остановимся в главе 2-ой этой части.

Из результатов главы 3 будет следовать, что в общем случае роль унитарного оператора, отображающего пространство $\tilde{L}_2$ функций от $\alpha$, заданных на лагранжевом многообразии $\Gamma$ в пространство $L_2$ функций от $x$, играет введенный там канонический оператор. Таким образом, с помощью канонического оператора получается такое представление, в котором квантовая механика переходит в классическую в целом, для

любого времени $t$ .

Для общего уравнения (1.16) представление, в котором мы получаем решение в виде асимптотического ряда по степеням $R_z$ мы назовем характеристическим.

## ГЛАВА 2. КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

### § I. Одномерный случай.

Вначале мы изложим существо дела для одномерного случая. Мы будем действовать по следующему плану.

Для построения асимптотических формул класса $K$, равномерных по $x$ на всей оси $x$, нам придется вначале сконструировать некоторый оператор, зависящий от параметра $h$, отображающий пространство функций на заданной кривой $\Gamma$ в фазовой плоскости $p, q$ в пространство функций на прямой $q$. Для конструкции этого оператора, названного каноническим, вводится понятие индекса пути на кривой, и кривая покрывается интервалами, взаимно однозначно проектируемыми x/ на одну из координатных осей ( $p$ или $q$ ). Вначале канонический оператор определяется локально - для каждого из таких интервалов, а затем с помощью разбиения единицы строится оператор для всей кривой $\Gamma$. Канонический оператор, вообще говоря, зависит от способа покрытия кривой $\Gamma$ интервалами и от способа разбиения единицы. Оказывается, однако, что если кривая не замкнута, то эта зависимость проявляется лишь на величинах первого порядка малости относительно параметра $h$. То же справедливо и для замкнутой кривой при условии, что площадь кривой удовлетворяет некоторому соотношению, которое в физической литературе называется условием квантования Бора. При помощи канонического оператора

---

x/ под этим понимается, что проекции являются диффеоморфизмами (гладкие взаимно-однозначные отображения с невырожденными якобианами).

мы выразим известную асимптотику собственной функции стационарного уравнения Шредингера, а также асимптотику решения задачи Коши для временного уравнения Шредингера. Приводимые в этом параграфе теоремы являются частным случаем более общих теорем, относящихся к случаю произвольного числа измерений. Теоремы формулируются в §§ 2-4.

## I°. Топологические предложения.

Рассмотрим ограниченную гладкую несамопересекающуюся кривую $\Gamma$ (не обязательно замкнутую) на фазовой плоскости x/, определяемую уравнениями $q = q(\alpha)$, $p = p(\alpha)$. Параметр $\alpha$ можно считать, например, длиной дуги, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Точку кривой $\Gamma$ с координатами $q(\alpha)$, $p(\alpha)$ будем также обозначать $\alpha$ . Назовем точки кривой $\Gamma$ , в которых выполняется условие $dq/d\alpha \neq 0$ , неособыми или, более подробно, неособыми относительно операции проектирования кривой $\Gamma$ на координатную ось $q$ параллельно оси $p$ . Остальные точки назовем особыми.

Предположим вначале, что множество $M$ особых точек конечно и что особые точки таковы, что при переходе через них производная $dq/dp$ вдоль $\Gamma$ меняет знак. Сопоставим каждой такой точке $\alpha \in M$ единичный касательный вектор $\bar{e}_\alpha$ в направлении возрастания $dq/dp$ (т.е. в сторону положительного значения $dq/dp$ ).

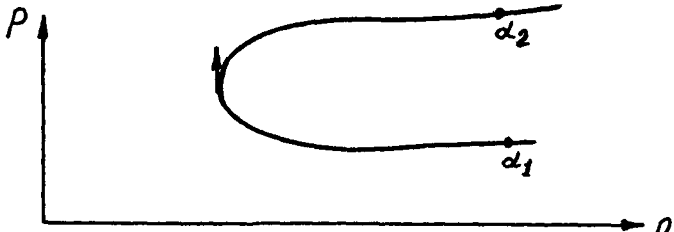
Определим индекс пути $\ell[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$ с началом в неособой точке $\alpha^1$ и концом в неособой точке $\alpha^2$

---

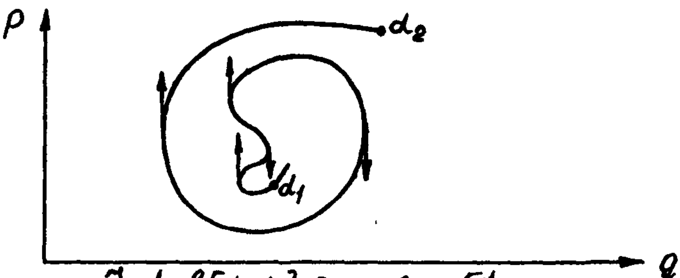
x/ Точнее, одномерное гладкое подмногообразие (возможно, открытое).


$Ind\ \ell[\alpha_1,\alpha_2]=0$

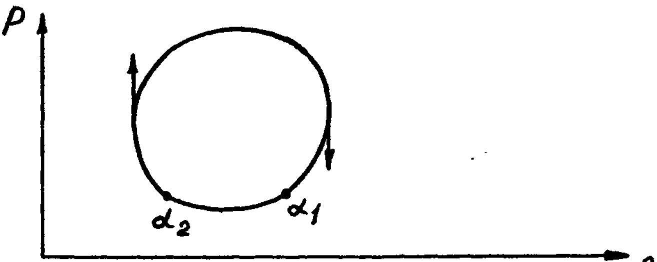
Рис 5а




$Ind\ \ell[\alpha_1,\alpha_2]=1$ Рис.5в.




$Ind\ \ell[\alpha_1,\alpha_2]=3$ Рис.5d




$Ind\ \ell[\alpha_1,\alpha_2]=-2$, обход совершается против часовой стрелки

Рис. 5с.

Рис. 5

следующим образом: если путь проходит особую точку $\alpha$ в направлении вектора $\bar{e}_\alpha$, то к индексу прибавляется I, если в противоположном направлении – то вычитается I (рис.5). Индекс пути $\ell[\alpha^1, \alpha^2]$ обозначается символом $Ind\ \ell[\alpha^1, \alpha^2]$.

Мы определили, таким образом, индекс пути при некоторых ограничениях, наложенных на множество $M$ и на точки $\alpha^1$ и $\alpha^2$, которые выполняются, когда кривая и путь находятся "в общем положении" [62],[1]

Определим индекс произвольного пути на произвольной кривой $\Gamma$, приведя ее и путь в общее положение малым поворотом осей по часовой стрелке. Имеет место следующее важное предложение, доказательство которого почти очевидно из наглядных соображений.

Индекс замкнутого пути (цикла), проходимого в направлении часовой стрелки является инвариантом относительно диффеоморфизмов.

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p} \qquad \dot{p} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q}, \qquad (1.1)$$

где $H(q,p,t)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов. Пусть $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ – несамопересекающаяся гладкая кривая $\Gamma$ в фазовой плоскости, и $Q(\alpha,t) = q(t)$, $P(\alpha,t) = p(t)$ – решение системы (1.1) с начальными данными $q^0(\alpha)$, $p^0(\alpha)$, лежащими на нашей кривой. Функции $Q(\alpha,t)$, $P(\alpha,t)$ задают отображение $U_t$ кривой $\Gamma$ в некоторую кривую $\Gamma_t$: $U_t\Gamma = \Gamma_t$. Всякий путь $\ell[\alpha^1, \alpha^2]$ переходит при этом в некото-

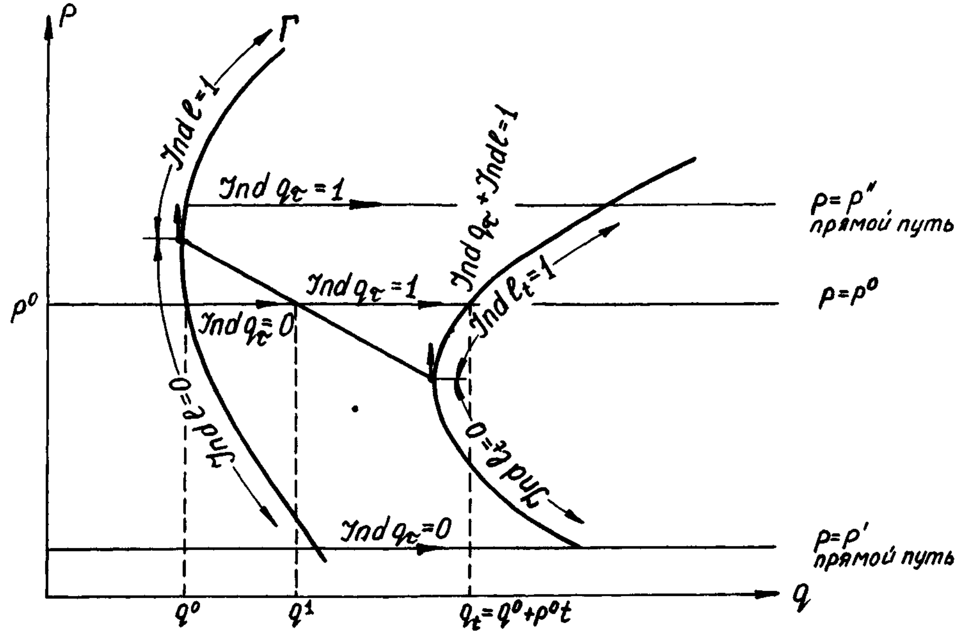



Рис. 6а $\quad \mathrm{Ind}\, q_t + \mathrm{Ind}\, l = \mathrm{Ind}\, l_t$

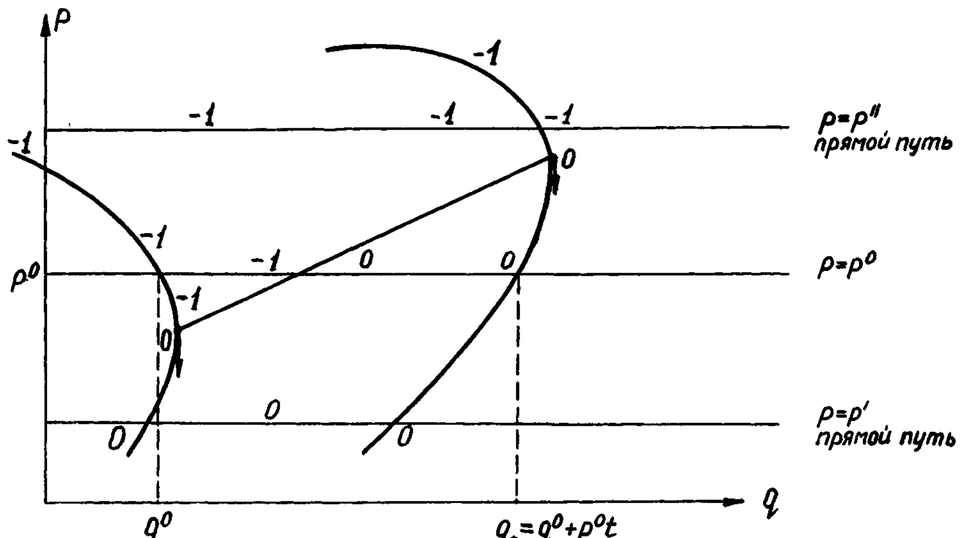



Рис. 6б. $\quad \mathrm{Ind}\, q_t + \mathrm{Ind}\, l = \mathrm{Ind}\, l_t \qquad$ 0, -1 - индексы путей $l, l_t, q_\tau$.

Рис. 6.

рый путь $U_t\, \ell[\alpha^1, \alpha^2] = \ell_t[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma_t$.

Спрашивается, как выражается $\mathrm{Ind}\, \ell_t\, [\alpha^1, \alpha^2]$ через $\mathrm{Ind}\, \ell[\alpha^1, \alpha^2]$ ? Для того чтобы ответить на этот вопрос, напомним некоторые определения, относящиеся к решению системы $(1.1)$ .

I) Множество точек $Q(\alpha^0, \tau)$ при $\tau$ , меняющемся от 0 до $t$ , называется траекторией (путем) и обозначается $Q(\alpha^0; 0, t)$

2) Точка $Q(\alpha^0, \tau)$ на траектории $Q(\alpha^0; 0, t)$ называется фокальной, если $\partial Q(\alpha^0, \tau)/\partial\alpha^0 = 0$

3) Пусть $\partial^2 H/\partial p^2 > 0$ . Индексом траектории $Q(\alpha^0; 0, t)$ назовем число фокальных точек на полуинтервале $0 < \tau \leq t$ (так называемый индекс по Морсу /43/,/53/ /).

Имеет место следующее соотношение, которое решает вопрос о том, как изменяется индекс пути при отображении $U_t$:

$$\mathrm{Ind}\, \ell[\alpha^1, \alpha^2] + \mathrm{Ind}\, Q(\alpha^2; 0, t) = \mathrm{Ind}\, \ell_t[\alpha^1, \alpha^2] + \\ + \mathrm{Ind}\, Q(\alpha^1; 0, t) \qquad (1.2)$$

В случае $H = p^2/2$ этот факт имеет простое геометрическое истолкование. Достаточно рассмотреть малое время $t$ и некоторую окрестность особой точки (т.е. точки, принадлежащей подмногообразию $M$ ). Рассмотрим два случая особых точек, отвечающих двум направлениям вектора $\bar{e}_\alpha$ (см. рис. 6).

На рис. 6а путь $p = p^0$ проходит через фокальную точку. Поэтому индекс пути $Q(\alpha, \tau) = p^0\tau + q^0$, $0 \leq \tau \leq t$ равен I. Как видно из графика, индекс пути $\ell_t$ на $\Gamma_t$ также равен I.

Положим $H = p^2/2 + v(q)$ , где $v(q)$ - дважды дифференцируемая функция, тогда для достаточно малого $t$ имеем: $Q(\alpha, t) \cong p^0(\alpha)\, t + q^0(\alpha)$, $P(\alpha, t) \cong p^0(\alpha) - v'(q^0(\alpha))t$

Произведем сначала деформацию

$$p_1 = p^0(\alpha), \quad q_1 = p^0(\alpha)\,\tau + q^0(\alpha) \qquad 0 \le \tau \le t$$

Обозначим образ кривой $\Gamma$ при этой деформации через $\Gamma_t'$. Теперь оставляя $q = q_1$ постоянным, произведем деформацию $p = p^0(\alpha) - v'(q^0(\alpha))\,\tau \quad 0 \le \tau \le t$ Таким образом, $\Gamma_t'$ переходит в $\Gamma_t$. Но эта последняя деформация, очевидно, не меняет соотношения $(1.2)$ между индексами.

2°. Канонический оператор.

Рассмотрим пространство $L_2[\Gamma, H]$ функций с интегрируемым квадратом по мере $d\alpha$ на кривой $\Gamma$ со значениями в гильбертовом пространстве $H$ и пространство $L_2[R^1, H]$ функций от $x$ с интегрируемым квадратом на прямой $-\infty \le x \le \infty$ со значениями в гильбертовом пространстве $H$. Пусть $A$ - неограниченный самосопряженный, положительно определенный оператор, причем $\infty$ является предельной точкой спектра оператора $A$.

Нас будут интересовать значения функций из $L_2[\Gamma, H]$ лишь в фактор-пространстве

$$S = L_2[\Gamma, H] \,/\, D(A) \cap D\left(\frac{d}{d\alpha}\right)$$

Мы будем рассматривать линейные операторы, с областью определения в $S$.

Рассмотрим случай, когда кривая $\Gamma$ взаимно-однозначно проектируется на ось $q$. Таким образом, из уравнения $q = q(\alpha)$ находится $\alpha = \alpha(q)$.

Обозначим через $K_{A,\Gamma}^{\sigma,\alpha^0}$ линейный оператор, определенный

на финитных бесконечно-дифференцируемых функциях $\varphi(\alpha)\in L_2[\Gamma,H]$ следующим образом

$$\left(K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi\right)(x)=K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=\left\{e^{i\gamma}\left|\frac{dq(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(q)}^{-1/2}\exp\left[iA\int_{\alpha^0}^{\alpha(q)}p\,dq\right]\varphi[\alpha(q)]\right\}_{q=x}, \quad (1.3)$$

где $\gamma$ - некоторая константа, не зависящая от $\alpha$ ; $\alpha^0$ - некоторая точка на кривой $\Gamma$ .

Пусть теперь кривая $\Gamma$ не проектируется взаимно-однозначно на прямую $q$, но зато взаимно-однозначно проектируется на прямую $p$ . Таким образом, из $p=p(\alpha)$ следует: $\alpha=\alpha(p)$. В этом случае обозначим через $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ оператор, действующий на $\varphi(\alpha)$ следующим образом

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=\frac{e^{i(\gamma-\frac{\pi}{4})}\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ipxA}\left|\frac{dp(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(p)}^{-1/2}\exp\left[-iA\int_{\alpha^0}^{\alpha(p)}q\,dp\right]\varphi[\alpha(p)]\,dp, \quad (1.4)$$

где $\gamma$ - некоторая константа, а $\alpha^0$ - некоторая точка на $\Gamma$ , в которой $dq(\alpha)/d\alpha=0$. Интеграл берется по отрезку, на котором $\varphi[\alpha(p)]$ отлична от нуля. Если $x$ лежит вне отрезка $\alpha$ оси $q$ , на который проектируется носитель $\varphi(\alpha)$ , то

$$\left(K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi\right)(x)\underset{s}{=}0 \quad (1.41)$$

Теперь рассмотрим произвольную кривую $\Gamma$ вышеописанного типа. Покроем кривую $\Gamma$ конечным числом открытых интервалов $\Omega^i$ , так, чтобы в каждом интервале $\Omega^i$ выполнялось одно из неравенств: либо $dq(\alpha)/d\alpha\neq 0$ для всех точек интервала, либо $dp(\alpha)/d\alpha\neq 0$ для всех его точек, а $dq(\alpha)/d\alpha$ обращается в нуль в некоторой точке. Области

первого типа назовем неособыми; области второго типа назовем особыми. В неособой области зададим в качестве локальных координат $q(\alpha)$ . В особой области - $p(\alpha)$ . Обозначим через $\Omega_0^{j'}$ неособую область $\Omega^{j'}$ с введенными в ней координатами $q(\alpha)$ (неособая локальная карта), а через $\Omega_1^j$ - особую область $\Omega^j$ с введенными в ней координатами $p(\alpha)$ ( $\Omega_1^j$ - особая локальная карта). Пусть $\Omega_1^j$, $j=j_1,\dots,j_n,\dots$ - совокупность всех особых карт, $\Omega_0^{j'}$, $j'=j'_1,\dots,j'_n,\dots,$ - совокупность всех неособых карт. Одну из точек $\alpha^j$ , принадлежащую особой области $\Omega^j$ , в которой $dq(\alpha)/d\alpha=0$ , назовем центральной точкой особой карты.*) Возьмем произвольную точку $\alpha^{j'}$ неособой карты $\Omega_0^{j'}$ и назовем ее центральной точкой карты. Совокупность карт $\Omega_1^j$ , $\Omega_0^{j'}$ образует атлас $\mathcal{H}$ кривой.

Сопоставим действительное число $\gamma$ центральной точке одной из карт атласа $\mathcal{H}$ , эту точку назовем начальной и обозначим $\alpha^0$ .

Пусть носитель $R$ функции $\varphi(\alpha)\in C^\infty$ лежит в области $\Omega^j$ . Определим действие канонического оператора на функцию $\varphi(\alpha)$ формулой (1.3) , если $\Omega^j$ - неособая, и формулой (1.4) , если $\Omega^j$ - особая, положив в этих формулах $\gamma=\gamma^0-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0;\alpha^j]$, где $\gamma^0$ - не зависящее от $j$ число; $\alpha^j$ - центральная точка карты, а $\ell[\alpha^0;\alpha^j]$ - некоторый путь из $\alpha^0$ в $\alpha^j$ . В общем случае можно определить канонический оператор с помощью разложения единицы по локальным картам. Обозначим через $e^i(\alpha)$, $i=1,\dots,N$ , разложение единицы , отвечающее покрытию $\{\Omega^i\}$ компакта $R$ . Это означает, что $e^i(\alpha)$

*) Если их несколько, то можно взять любую из них.

удовлетворяет условиям: 1 $e^i(\alpha) \in C^\infty$ и равно нулю вне $\Omega^i$, 2) $\sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha) = 1$, если $\alpha \in R$.

Для финитной функции $\varphi(\alpha)$ имеем: $\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$
Носитель каждого члена суммы принадлежит лишь одной локальной карте, поэтому на каждой из функций $e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$ $i=1,\dots,N$ канонический оператор определен выше. В силу линейности и при учете (1.4.1) мы получим отсюда общий вид канонического оператора, действующего на финитную функцию $\varphi(\alpha)$. Приведем его.

Пусть $j(x)$ – совокупность номеров всех тех карт атласа $\mathcal{H}$, которые содержат множество точек, являющееся пересечением прямой $q = x$ и отрезка $R \subset \Gamma$. Отрезок $R \subset \Gamma$ покрывается конечным числом карт атласа $\mathcal{H}: \Omega^1,\dots,\Omega^N$.

В общем случае канонический оператор $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ имеет вид

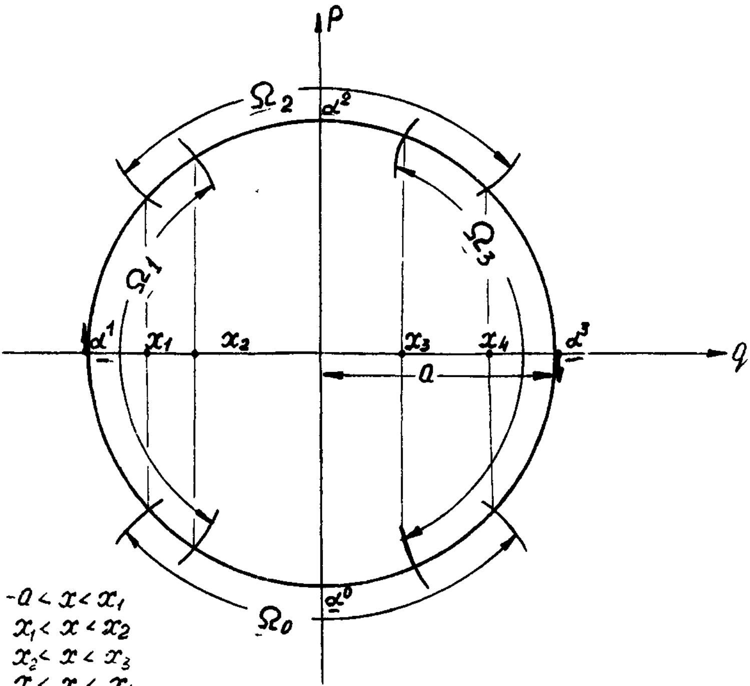
$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) = e^{i\gamma}\sum_{j,j'\in j(x)}\Big[e^{-i\pi/2\,\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0;\alpha^{j'}]}\, e^{j'}[\alpha(q)]\left|\frac{dq}{d\alpha}[\alpha(q)]\right|^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot e^{iA\int_{\ell[\alpha^0;\alpha(q)]} p\,dq}\,\varphi[\alpha(q)] + e^{-\frac{i\pi}{2}\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0;\alpha^j]}\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi i}}\int e^{ipqA}\,e^{j}[\alpha(p)]\cdot$$

$$\cdot\left|\frac{dp}{d\alpha}[\alpha(p)]\right|^{-1/2} e^{-iA\int_{\ell[\alpha^0;\alpha(p)]} q\,dp}\,\varphi[\alpha(p)]\,dp\Big]_{q=x}, \qquad (1.5)$$

где $\ell[\alpha^0,\alpha^k]$ – некоторые пути из $\alpha^0$ в $\alpha^k$.

Замечание. В случае, если $\Gamma$ – неограниченная кривая, а $A = \frac{1}{h}$, заменяя в формуле (1.5) $\varphi(\alpha)$ на $\xi(\alpha,h)\cdot\varphi(\alpha)$, где $\xi(\alpha,h)$ – функция-регуляризатор, равная единице с




$$
j(x)=\begin{cases} 1 & -a < x < x_1 \\ 0,1,2 & x_1 < x < x_2 \\ 0,2 & x_2 < x < x_3 \\ 0,2,3 & x_3 < x < x_4 \\ 3 & x_4 < x < a \end{cases}
$$

$\varphi(\alpha)=1,\ R=\Gamma$

Рис. 7а. Атлас $\mathcal{X}$ окружности $q=a\cos\alpha,\ p=a\sin\alpha$; $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – карты

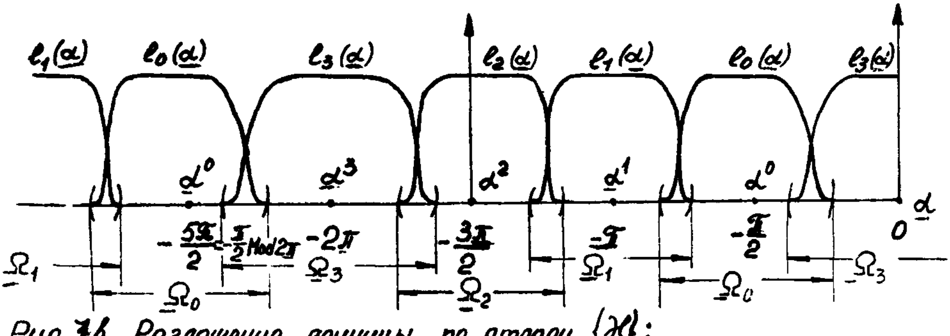



Рис. 7б. Разложение единицы по атласу $\{\mathcal{X}\}$:

$$\sum_{i=0}^{3} e_i(\alpha) \equiv 1, \quad e_i(\alpha) \in C^\infty, \quad e_i(\alpha) \equiv 0 \text{ при } \alpha \bar{\in} \Omega_i$$

Рис. 7.

Пояснение к рис. 7.

На рис. 7 кривая $\Gamma$ — окружность: $p = a\cos\alpha$, $q = a\sin\alpha$, $-2\frac{1}{2}\pi \le \alpha \le -\frac{\pi}{2}$, концевые значения $\alpha$ отождествлены, а $\varphi(\alpha) \equiv 1$.

Пусть $\alpha^0 = -\frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, $\ell[\alpha^0, \alpha]$ дуга, меньшая $2\pi$, взятая в направлении часовой стрелки от точки $-\pi/2$ до точки $\alpha$. Возьмем карты $\Omega_i$, изображенные на рис. 5. Центральные точки карт будут

$$\alpha^0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha^1 = -\pi, \quad \alpha^2 = -\frac{3\pi}{2}, \quad \alpha^3 = -2\pi$$

По определению

$$\operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \alpha^1] = 0, \quad \operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \alpha^2] = 1, \quad \operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \alpha^3] = 1$$

Разложение единицы $e_i(\alpha)$, $i=1,\dots,4$ по этим областям имеет вид, изображенный на рис. 5б.

Канонический оператор примененный к $1$ в данном случае равен

$$K^{0,-\frac{\pi}{2}}_{p^2+q^2=a^2} 1 = (a^2 - x^2)^{-1/4} \exp\left\{\frac{i}{h}\left[-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{|x|}{a}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left\{\frac{i}{h}\left[\frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2-x^2} + \frac{\pi a^2}{4}\right]\right\} + i(a^2-x^2)^{-1/4}\cdot\right.$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{h}\left[\frac{a^2}{2}\arccos\frac{|x|}{a} - \frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2-x^2} + \frac{\pi a^2}{4}\right]\right\} \tag{I.5}$$

это выражение совпадает с квазиклассической асимптотикой осциллятора (случай (1.8) при $V(x) = x^2$)

точностью до $O(h^{\infty})$ в любой ограниченной области и достаточно быстро стремящаяся к нулю при $\alpha \to \infty$ (например, $\xi(\alpha,h) = \exp\{-\alpha^2 \exp[-1/h]\}$ ), мы получим, что ряды в (1.5) сходятся для любой ограниченной функции $\varphi(\alpha)$. Нетрудно убедиться, что для определенного таким образом канонического оператора будут справедливы при некоторых ограничениях в любой ограниченной области все результаты сформулированных ниже теорем. Аналогичное утверждение справедливо и в многомерном случае.

3°. Инвариантность канонического оператора.

Пусть кривая $\Gamma$ не замкнута. Тогда канонический оператор $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ не зависит от вида атласа и от способа разбиения единицы, т.е. выражения $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha)$ для различных атласов и разбиений единицы отличаются лишь на функции вида $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \mathcal{F}(\alpha)$ , где $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial \alpha})$

Подразумевается, что точка $\alpha^0$ при новом разбиении осталась начальной точкой атласа, а значит, осталась центральной точкой некоторой карты.

Если же точка $\alpha = \alpha^0$ не осталась при новом разбиении центральной точкой карты, а стала принадлежать карте с центральной точкой $\alpha_1^0$ , то в качестве начальной точки нового атласа должна быть взята какая-либо другая точка, например, $\alpha_1^0$ . Тогда прежний канонический оператор при таком новом разбиении равен (1.8) $K_{A,\Gamma}^{\tilde{\gamma},\alpha^0}$ , где

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \alpha_1^0] + \frac{1}{h} \int_{\ell[\alpha^0,\alpha_1^0]} p\,dq$$

Если кривая $\Gamma$ замкнута, то канонический оператор $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ не зависит от способа разбиения единицы, но зависит, вообще говоря, от выбора путей $\ell[\alpha^0; \alpha^k]$ из начальной точки в центральные точки карт.

В этом случае для того чтобы канонический оператор $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ не зависел от выбора канонического атласа и путей $\ell[\alpha^0, \alpha^k]$, необходимо и достаточно, чтобы точки спектра оператора $A$ удовлетворяли соотношению

$$\lambda = \frac{2\pi(n+\frac{1}{2})}{\oint p\,dq} + O(1/\lambda) \qquad (1.6)$$

Заметим, что если положить $\lambda = 1/h$, то эта формула совпадает по форме с известной в физической литературе формулой квантования Бора.

Замечание относительно начальной точки атласа остается в силе и для случая замкнутой кривой.

Условие (1.6), а, следовательно, и инвариантность канонического оператора, сохраняется при преобразовании, сохраняющем площадь (каноническом преобразовании).

4°. Квазиклассическая асимптотика.

I. Рассмотрим на прямой задачу на собственные значения уравнения

$$y'' + \nu Q(x)\,y = 0, \qquad (Q(x) = \lambda - V(x)) \qquad (1.7)$$

где $Q(x) \in C^\infty$, $Q(\pm\infty) = -\infty$ при условии $\int y^2 dx < \infty$ (1.7a)

Рассмотрим в фазовой плоскости $p, q$ кривую $p^2/2 - Q(q) = 0$. Известно, что собственные значения $\nu = \nu_n$ задачи (1.7a)–(1.8) будут удовлетворять условию (1.6).[35],[76]

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{h^2\psi''}{2\mu} + V(x)\psi = \lambda\psi; \quad \int \psi^2 dx < \infty \qquad (1.8)$$

При произвольном $V(x) \in C^\infty$, таком, что $V(\pm\infty) = -\infty$ имеет место следующее предложение.

) Пусть $\Gamma_n = \{q_n(\alpha), p_n(\alpha)\}$ — последовательность замкнутых кривых, удовлетворяющих уравнениям

$$\mu\frac{dq_n}{d\alpha} = p_n(\alpha); \quad \frac{dp_n}{d\alpha} = -\frac{\partial V(q_n)}{\partial q_n}; \quad \frac{p_n^2}{2\mu} + V(q_n) = E_n,$$

где $E_n \subset [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$ — зависящее от $h$ множество,

определяемое условием $\oint p\,dq = 2\pi(n+\frac{1}{2})h$.

Существует зависящий от $h$ набор собственных значений $\lambda = \lambda_n$ уравнения $(1.8)$ в пространстве $L_2$ на прямой, такой что

$$\lambda_n - E_n = O(h^2), \quad \| \psi_n - K^{q\alpha^0}_{\Gamma_n} \cdot 1 \| = O(h), \text{ где } \psi_n -$$

-собственные функции, отвечающие $\lambda_n$ .

Выписанная здесь асимптотика сводится к общеизвестной с помощью формул, приведенных в [7 (1)]

Приведенная нами запись первого члена асимптотики собственной функции в определенном смысле инварианта относительно перехода к $p$ - представлению.

2. Относительно решения задачи Коши для уравнения Шредингера $(1.6)$ гл.1 справедливо следующее предложение:

Пусть функция $v(x,t) \in C^3$, $\varphi(\alpha) \in C^2$ .
Решение $\psi(x,t)$ уравнения $(1.6)$ гл.1, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(x,0) = K^{p\alpha^0}_{1/h,\Gamma} \varphi(\alpha) \qquad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}, \qquad (1.9)$$

имеет вид

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t} \varphi(\alpha) + z_h(x,t) \qquad (1.10)$$

$$\Gamma_t = \{ Q(\alpha,t), P(\alpha,t) \}$$

где $Q(\alpha,t)$, $P(\alpha,t)$ - решение задачи Коши для системы уравнений Гамильтона

$$\mu \dot{Q}(\alpha,t) = P(\alpha,t) \qquad Q(\alpha,0) = q^0(\alpha) \qquad (1.11)$$

$$\dot{P}(\alpha,t) = -\frac{\partial v(Q,t)}{\partial Q} \qquad P(\alpha,0) = p^0(\alpha),$$

$$\gamma = \frac{1}{h} \int_0^t \left\{ \frac{\mu \dot{Q}^2}{2}(\alpha^0,\tau) - v[Q(\alpha^0,\tau)] \right\} d\tau - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} Q(\alpha^0, t),$$

$$\int |z_h(x,t)|^2 dx \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Мы видим, таким образом, что решение уравнения (1.6) и 1 в любой момент времени $t$ принадлежит с точностью до функций $z_h(x,t)$ одному и тому же классу функций вида

$$K_{1/h,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha) ,$$

где $\gamma$ и $\Gamma$ переменны. Это означает, что условие инвариантности в определении класса $K$ (см. § 2 гл. I) выполнено.

Принцип соответствия также будет выполнен для решений такого вида.

3 <u>Следствие.</u> Пусть носитель $R$ функции $\varphi(\alpha)$ достаточно мал: $R = \{\alpha_0 - \varepsilon \le \alpha \le \alpha_0 + \varepsilon\}$ и выполнены все условия предыдущего предложения. Тогда, если образ $R$ на $\Gamma_t$, обозначаемый $R_t$, состоит из неособых точек, то

$$\int\limits_{\alpha(x)\in R_t} |\psi(x,t)|^2 dx \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{R} \varphi^2(\alpha) d\alpha$$

и стремится к нулю вне этой области.

Если же $R_t$ целиком принадлежит особой карте, то

$$\int\limits_{\alpha(p)\in R} |\bar{\Psi}(p,t)|^2 dp \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{R} \varphi^2(\alpha) d\alpha$$

и стремится к нулю вне этой области.

Это означает, что интеграл от $|\psi|^2$ либо в $x$, либо в $p$ - представлении ведет себя при $h \to 0$ как классическая вероятность $\int \varphi^2(\alpha) d\alpha$, оставаясь в пределе постоянной вдоль классических траекторий. Аналогично можно показать, что все квантовомеханические величины в пределе при

$h \to 0$ переходят в классические, т.е. принцип соответствия выполняется. Таким образом, все условия, требуемые в § 2 п 6 гл. I от класса $K$, выполнены для

$$K^{\sigma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}(x)\,\varphi(\alpha).$$

Таким образом, мы получаем переход в классическую механику в любой точке $x, t$. Значит, предельный переход существует и в фокальных точках (точках поворота), только в этих точках $\psi$ - функцию нужно рассматривать в $p$ - представлении. Заметим, что в физической литературе (например, в известной книге Л.Ландау и Е.Лифшица "Квантовая механика" утверждается, что в точках поворота нарушается условие квазиклассичности", и при $h \to 0$ вблизи этих точек нет перехода в классическую механику. Аналогичные утверждения делаются в физической литературе относительно перехода из волновой оптики в геометрическую вблизи фокуса [13], [32, 1)].

На самом деле, как мы видим (и увидим далее в многомерном случае) переход в классическую механику (а аналогично и в геометрическую оптику) совершается в любой точке. Чтобы в этом убедиться, нужно лишь перейти к соответствующему представлению $\psi$ - функции.

$5^0$. Асимптотические ряды.

Поскольку в дальнейшем будет речь всегда итти об асимптотических рядах, то и знак равенства мы условимся понимать в некоторой "асимптотическом" смысле, который мы сейчас определим.

Мы будем говорить, что функция $\mathcal{F}(x,t)$ со значениями в $H$ эквивалентна нулю, если для любых целых $N_1$, $N_2$ и $N_3$ функция $A^{N_1-N_2-N_3}\dfrac{\partial^{N_2+N_3}\mathcal{F}(x,\tau)}{\partial x^{N_2}\,\partial\tau^{N_3}}$

ограничена по норме в $H$ равномерно по

$x \in R^n, \quad \tau \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon], \quad \varepsilon > 0.$

Мы отождествим между собой функции, разность между которыми эквивалентна нулю.

Таким образом, функции от $x$ и $t$ факторизуются по подпространству функций, имеющих бесконечное число ограниченных производных и принадлежащих $D(A^\infty)$. Мы будем рассматривать также функции со значениями в банаховом и счетно-нормированном пространстве. И в этом случае осуществляется такая же факторизация, т.е. функции, принадлежащие $D(A^N)$ при любом $N$ и бесконечно дифференцируемые, полагаются эквивалентными нулю.

<u>Запомним, что все равенства, которые в дальнейшем будут написаны для функций от $x$ со значениями в банаховом, или в счетно-нормированном пространстве, справедливы лишь с точностью до функций, эквивалентных нулю.</u>

Далее, если мы говорим, что функция $f(x,t,h)$ $N$ раз дифференцируема, то это значит, что все её $N$ производных по $x, t$ ограничены при $h \to 0$. Если $f(x,t,h)$ - функция со значениями в банаховом (или счетно-нормированном) пространстве, то $N$ - кратная дифференцируемость функции означает, что ее $N$ производных ограничены по норме в этом пространстве (или соответственно ограничены все нормы счетно-нормированного пространства) равномерно по $h$ при $h \to 0$

Рассмотрим функцию от $\alpha \in \Gamma$ и $h$: $e^i(\alpha, h)$ в окрестности точки $h = 0$, принадлежащую $C^\infty(\alpha, h)$ Иначе говоря,

$$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^i(\alpha,h)=\sum_{j=0}^{\infty} h^j \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^i_j(\alpha)+O(h^\infty) \qquad (1.13)$$

Слагаемое $O(h^\infty)$ означает, что написанные ряды асимптотические при $h\to 0$. Пусть далее $e^i(\alpha,0)=e^i(\alpha)$, $i=1,\dots,N$, где $e^i(\alpha)$ принадлежит к разложению единицы по атласу $\mathcal{H}$. Заменим теперь в выражении $K^{\gamma,\alpha^0}_{\chi_h,\Gamma}\varphi(\alpha)$ функцию $e^i(\alpha)$ на $e^i(\alpha,h)$. Получается семейство операторов, зависящих от $e^i(\alpha,h)$. Мы будем их обозначать через

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{\chi,\Gamma,h}, \quad \tilde{K}^{\gamma,\alpha^0}_{\chi_h,\Gamma,h}, \quad \tilde{\tilde{K}}^{\gamma,\alpha^0}_{\chi_h,\Gamma,h}, \dots$$

Таким образом, запись $K^{\gamma,\alpha^0}_{\chi,\Gamma,h}\varphi(\alpha)$ не определяет вида $e^i(\alpha,h)$ при $h\neq 0$. Заметим, что два члена указанного семейства равны, вообще говоря, лишь с точностью до $O(h)$.

$$\tilde{K}^{\gamma,\alpha^0}_{\chi_h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)=\tilde{\tilde{K}}^{\gamma,\alpha^0}_{\chi_h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)\left[1+O(h)\right]$$

Аналогичным образом определяется оператор $K^{\alpha_0,\gamma}_{A,\Gamma,R_z}$, где $A$ - положительно определенный оператор, $R_z$ - его резольвента $(A-z)^{-1}$. В этом случае в формулах (1.13) надо заменить $h$ на $R_z$.

При этом $e^i(\alpha,R_z)$ и все их производные по $\alpha$ будут ограниченными операторами в $H$, зависящими от параметра $\alpha$.

Аналогично, если $\varphi(\alpha)$ - функция со значениями в счетно-нормированном пространстве, которое является пересечением банаховых пространств $B_1,\dots,B_N,\dots$, $B_{i+1}\subseteq B_i$, а $A$ - оператор, удовлетворяющий в каждом из этих пространств

условиям пункта 4.5 гл. I, то $e^i(\alpha, R_z)$, где $R_z = (A - z)^{-1}$, являются непрерывными операторами в $B^\infty$, причем $e^i(\alpha,0)$ – числовые функции, являющиеся элементами разложения единицы.

## 6. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши.

Пусть $v(x,t) \in C^\infty$, $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ и финитна, а решение $\psi(x,t)$ уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{2\mu} \frac{d}{dx^2} + v(x,t)\right]\psi = \hat{H}\psi \qquad (1.14)$$

удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x,0) = K^{\gamma^0_,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\ \varphi(\alpha), \qquad (1.14)'$$

Тогда $\psi(x,t)$ представимо в виде

$$\psi(x,t) = \tilde{K}^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t h}\ \varphi(\alpha), \quad \Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\} \quad (1.15)$$

где $\Gamma_0 = \Gamma$, $\mu\dot{Q} = P$, $P = -\frac{\partial v}{\partial Q}$

$$\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2} Ind\, Q(\alpha^0; 0, t) + \frac{1}{h}\int_0^t \left\{\frac{P^2(\alpha^0,\tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha^0,\tau),\tau]\right\} d\tau.$$

6.1. Примеры. Мы теперь покажем, какой имеет вид в конкретных случаях выписанная выше асимптотика решения уравнения Шредингера.

Предположим, что начальное условие для уравнения $(1.14)$ имеет вид

$$\psi(x,0) = \varphi(x)\, exp\left[\frac{i}{h} f(x)\right], \qquad (1.16)$$

где $\varphi(x)$ – финитная функция с носителем $[-1,1]$, $f(x) \in C^\infty$, $f(0) = 0$. Начальное условие $(1.16)$ есть условие вида $(1.14)'$ при $\Gamma = \{q^0(\alpha) = \alpha,\ p^0(\alpha) = f'(\alpha)\}$,

$\alpha \in [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, $\alpha^0 = 0$, $\gamma^0 = 0$.

Канонический атлас состоит из одной неособой карты, $e^1(\alpha, h) =$. при $-1 \le \alpha \le 1$.

Пусть пересечение прямой $q = x$ с кривой $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ при всех $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$ не содержит особых точек, тогда оно состоит лишь из конечного числа точек $\alpha', \dots, \alpha^k$. Пусть $\gamma^j$ - индекс пути $Q(\alpha^j; 0, t)$, т.е. число нулей функции $\frac{\partial Q(\alpha^j, \tau)}{\partial \alpha^j}$ при $0 \le \tau \le t$; $S(\alpha^j, t)$ - решение уравнения

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\mu \dot{Q}^2}{2} - v(Q, t),$$

удовлетворяющее условию $S(\alpha^j, 0) = f(\alpha^j)$. Поскольку

$$f(\alpha) = \int_{\ell_0[0,\alpha]} p\,dq \quad \text{и}$$

$$S(\alpha, t) = \int_{\ell_0[0,\alpha]} p\,dq + \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha,t)}{2\mu} - v[Q(\alpha,\tau),\tau] \right\} d\tau =$$

$$= \int_0^t \left\{ \frac{P^2(0,\tau)}{2\mu} - v[Q(0,\tau),\tau] \right\} d\tau + \int_{\ell_t[0,\alpha]} p\,dq,$$

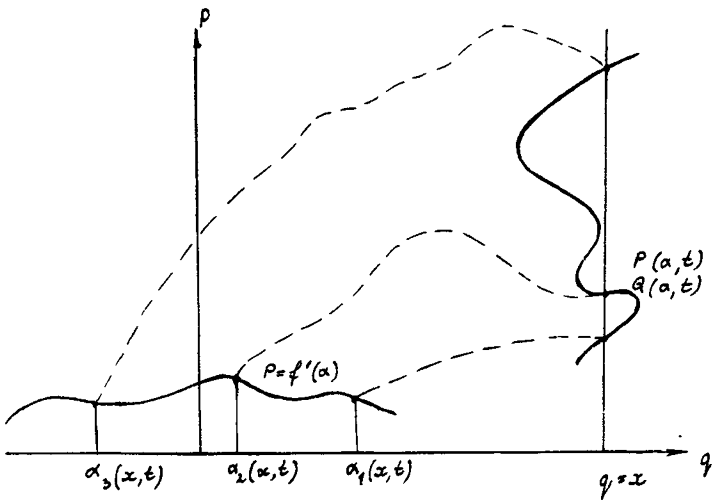
то решение можно записать в виде

$$\psi(x,t) = \sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{i\pi\gamma^j}{2}} \varphi[\alpha^j(x,t)] \left| \frac{\partial Q}{\partial \alpha^j}[\alpha^j(x,t),t] \right|^{-1/2} e^{i/h\, S[\alpha^j(x,t),t]} + h\,\Phi(x,t,h), \qquad (1.17)'$$

где $\Phi(x,t,h)$ ограничена при $h \to 0$ в окрестности точки $x = x'$.

Этот результат может быть сформулирован еще двумя различными способами.

1). Пусть точка $(x, t)$ не является фокальной ни для одной из экстремалей функциона




$\alpha_1(x,t)$, $\alpha_2(x,t)$, $\alpha_3(x,t)$ находятся из уравнения $Q(\alpha,t)=x$;

Рис. 8.

$$\Phi(q) = f(q^0) + \int_{q^0}^{x,t} \left\{ \frac{\dot{q}^2}{2\mu} - v(q,t) \right\} dt \quad , \tag{1.18}$$

т.е. все решения задачи

$$\mu \ddot{q} = -\frac{\partial v(q,t)}{\partial q} \tag{1.19}$$

$$\mu \dot{q}(0) = f'[q(0)] \,, \qquad q(t) = x$$

удовлетворяют условию $dq(0)/dx \neq \infty$.

Тогда задача (1.19) имеет лишь конечное число решений

$q_1(\tau), \ldots, q_k(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t$ и

$$\psi(x,t) = \sum_{\nu=1}^{k} e^{-\frac{i\gamma_\nu \pi}{2}} \varphi[q_\nu(0)] \left| \frac{dq_\nu(0)}{dx} \right|^{1/2} e^{i/h\,\Phi(q_\nu(\tau))} + O(h), \tag{1.20}$$

где $\gamma_\nu$ - число фокальных точек на пути $q_\nu(\tau)$ при $0 < \tau \leq t$.

2) Предположим, что решение уравнения $\mu \ddot{X} = -\frac{\partial v}{\partial X}(X,t)$ удовлетворяет условиям:

$$X(0) = x_0 , \quad \mu \dot{X}(0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Рассмотрим множество $M(x)$ решений уравнения $X(x_0,t) = x$. Если $M(x)$ не содержит фокальных точек, (т.е. точек, в которых $\frac{\partial X(x_0,t)}{\partial x_0} = 0$ ), то оно состоит лишь из конечного числа точек $x_0', \ldots, x_0^k$, которые являются функциями от $x$ и $t$: $x_0' = x_0'(x,t), \ldots, x_0^k = x_0^k(x,t)$ (см. рис. 8 ). Пусть $\gamma^j$ - индекс пути $X(x_0^j; 0,t)$, т.е. число нулей производной $\frac{\partial X}{\partial x_0^j}(x_0^j, \tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, $S(x_0,t)$ - решение уравнения: $dS/dt = \mu \dot{X}^2/2 - v(X,t)$ при условии $S(x_0, 0) = f(x_0)$. Тогда

$$\psi(x,t)=\sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{i\pi\gamma^j}{2}} \varphi[x_0^j(x,t)] \left| \frac{\partial X}{\partial x_0}(x_0^j(x,t),t)\right|^{-1/2} e^{i/h\, S(x_0^j(x,t),t)} + O(h) \qquad (1.21)$$

Пусть теперь пересечение прямой $q=x'$ и кривой $\Gamma_t=\{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}$ есть отрезок $p'\le p\le p''$. Следовательно, для $p\in\{p'-\varepsilon, p''+\varepsilon\}$ из $P(\alpha,t)=p$ получаем $\alpha=\alpha(p,t)$. Тогда решение $\psi(x,t)$ представимо в виде

$$\psi(x,t)=\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}(\gamma-\frac{1}{2})}}{\sqrt{2\pi h}}\int_{p'-\varepsilon}^{p''+\varepsilon}\mathcal{F}(p)\exp\left\{\frac{ip}{h}[x-Q(\alpha(p,t),t)]\right\}\left|\frac{dP}{d\alpha}[\alpha(p,t),t]\right|^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{i}{h}S[\alpha(p,t),t]\right\}dp+\sqrt{h}\;\Phi(x,t,h), \qquad (1.22)$$

где $\mathcal{F}(p)$ - гладкая функция, равная I при $p'\le p\le p''$ и нулю вне $p'-\varepsilon\le p\le p''+\varepsilon$, $\gamma$ равно числу фокальных точек на какой-либо траектории $Q(\alpha(p,t);0,t)$ при $p\in[p',p'']$, а $\Phi(x,t,h)$ равномерно ограничена при $h\to 0$ в окрестности точки $x=x'$!

Заметим, что если $p'=p''$, а точка $q=x'$ - особая, то интеграл (1.22) можно легко упростить, разложив подинтегральное выражение в ряд в окрестности точки $p=p'$ и ограничившись первыми членами (см. [79*D] ).

7°. <u>Асимптотика решения системы уравнений.</u>

I. В общем случае можно считать, что функция $\varphi(\alpha)$ на многообразии $\Gamma$ есть суммируемая по Бохнеру функция со значениями в банаховом пространстве $B$. (Впрочем, во всех конкретных случаях табл. I $\varphi(\alpha)$ есть просто вектор-функция, т.е. $B$ - конечномерно).

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+hR(x,t)\psi+v(x,t)\psi, \qquad (1.23)$$

где $R(x,t)$ - ограниченная бесконечно дифференцируемая $r\times r$ матрица, $v(x,t)\in C^\infty$.

Пусть

$$\psi(x,0)=K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)\ell(\alpha), \qquad (1.24)$$

где $\varphi(\alpha)$ - финитная суммируемая функция, а $\ell(\alpha)=\{\ell_1(\alpha)\dots\ell_r(\alpha)\}$ вектор функция, $|\ell(\alpha)|=1$.

Тогда

$$\psi(x,t)=K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t,h}\varphi(\alpha)e^{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]d\tau}\ell(\alpha), \qquad (1.25)$$

где выражение $e^{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]d\tau}$ обозначает функцию $f(\alpha,t)$ со значениями в $B$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{df(\alpha,t)}{dt}=iR[Q(\alpha,t),t]f(\alpha,t),\quad f(\alpha,0)=r(\alpha)\in B, \qquad (1.26)$$

$\Gamma_t, Q, P$ *определены в предыдущей теореме, а*

$$\gamma=\frac{1}{h}\int_0^t\left\{\frac{\mu\dot{Q}^2(\alpha^0,\tau)}{2}-v(Q(\alpha^0,\tau),\tau)\right\}d\tau-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,Q(\alpha^0,0,t)$$

## $8^0$. Поведение разрывов решений гиперболического уравнения.

I. Для того чтобы получить асимптотическое разложение разрыва решения гиперболического уравнения, нам необходимо определить канонический оператор $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,h}$ для случая, когда оператор $A$ равен $i\frac{\partial}{\partial\tau}$ (см. п. $6^0$ § I, гл. I), т.е. не является положительно определенным.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор $A$ отрицательно определен. В этом случае полагаем

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} = K_{-A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$$

Если оператор $A$ не является полуопределенным, то разложим пространство $H$ на сумму $H = H^+ + H^-$ таких, что сужение оператора $A$ на $H^+$ есть неотрицательно определенный оператор $A^+$, а сужение оператора $-A$ на $H^-$ - неотрицательно определенный оператор $A^-$.

Пусть $\varphi(\alpha) = \varphi^+(\alpha) + \varphi^-(\alpha)$, где

$$\varphi^+(\alpha) \in H^+, \quad \varphi^-(\alpha) \in H^- .$$

По определению положим

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{A^+,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi^+(\alpha) + K_{A^-,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi^-(\alpha) .$$

Например, когда $A = i\,\frac{d}{d\tau}$ - оператор в пространстве $H = L_2[-\infty, \infty]$ функций от $\tau$, $\Gamma$ - прямая $p = 0$, $\varphi(\alpha) = \delta(\tau) f(q)$, то $\delta(\tau) = \delta_+(\tau) + \delta_-(\tau)$, где

$$\delta_+(\tau) = \int_0^\infty e^{i\lambda\tau} d\lambda , \qquad \text{а}^{x/} \quad \delta_-(\tau) = \delta_+^*(\tau)$$

Поэтому

$$K_{i\frac{d}{d\tau}, p=0}^{\gamma,\alpha^0} f(q)\,\delta(\tau) = 2 f(x)\, \mathrm{Re}\, e^{i\gamma} \delta_+(\tau)$$

2. Перейдем теперь к изучению поведения разрыва решения гиперболического уравнения.

Рассмотрим решение $u(x,y,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x,t)\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \qquad (1.27)$$

---

x/ Об обобщенных функциях см. [22, 1]

удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,0)=\delta(y-y_0)\varphi(x) \qquad u'_t(x,y,0)=0 \tag{1.28}$$

Пусть коэффициенты уравнения достаточно гладки, $\varphi(x)$ - финитна и имеет компактный носитель, Положим $A = i\partial/\partial y$ . Тогда $A$ - характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - c^2(x,t)\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+1\right)=0$$

Оно распадается на два уравнения

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = (-1)^\nu c(x,t)\sqrt{\left(\frac{\partial S^\nu}{\partial x}\right)^2+1} \qquad \nu=1,2$$

Пусть $Q^\nu(\alpha,t)$, $P^\nu(\alpha,t)$, $S^\nu(\alpha,t)$, $\nu=1,2$ – решения систем

$$\dot p^\nu = (-1)^\nu \frac{\partial H}{\partial q} \qquad \dot q^\nu = (-1)^{\nu+1}\frac{\partial H}{\partial p} \qquad H = c(q,t)\sqrt{p^2+1}$$

$$\frac{dS^\nu}{dt} = (-1)^\nu\left[H - p^\nu H_{p^\nu}\right] = (-1)^\nu \frac{c(q,t)}{\sqrt{p^2+1}} \tag{1.29}$$

удовлетворяющие условиям

$$q^\nu(0)=\alpha, \quad p^\nu(0)=0, \quad S^\nu(0)=0$$

Решение задачи (1.27) - (1.28) можно представить в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{\nu=1}^{2} K^{\,\gamma^\nu,\alpha^0}_{i\frac{\partial}{\partial y},\,\Gamma_t^\nu}\, \varphi(\alpha)\,\delta(y-y_0) + \mathcal{F}(x,y,t),$$

где $\mathcal{F}(x,y,t)$ - ограниченная функция, а $\Gamma_0^\nu$, $\nu=1,2$, есть многообразие $p=0$, $\Gamma_t^\nu$, $\nu=1,2$ - соответственно сдвинутое многообразие $p=0$ вдоль траекторий системы (1.29), $\gamma^\nu(t) = \frac{1}{h} S^\nu(\alpha^0,t) + \frac{1}{2}\pi\, \mathrm{Ind}\, Q^\nu[\alpha^0; 0,t]$

Далее, если точка $x, t$ не является фокальной ни для одной из траекторий $Q^{\nu}(\alpha; 0, t)$, $\nu = 1, 2$, то существует конечное число решений $\alpha_j^{\nu}(x, t)$, $j = 1, \ldots, K^{\nu}$ уравнения

$$Q^{\nu}(\alpha, t) = x,$$

и решение $u(x, y, t)$ может быть представлено в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=1}^{K} \frac{\varphi(\alpha_j^{\nu})}{\sqrt{\left|\frac{\partial Q^{\nu}(\alpha_j^{\nu}, t)}{\partial \alpha_j^{\nu}}\right|}} Re\, e^{-\frac{i\pi \gamma_j^{\nu}}{2}} \cdot \delta_+(y - y_0 + S(\alpha_j^{\nu}, t))\Big|_{\alpha_j^{\nu} = \alpha_j^{\nu}(x,t)} +$$

$$+ \mathcal{F}(x, y, t),$$

где $\mathcal{F}(x, y, t)$ - ограниченная функция.

Таким образом, мы видим, что если число фокальных точек на траектории $Q^{\nu}(\alpha_j^{\nu}; 0, t)$ нечетно, то разрыв решения имеет вид полюса первого порядка, если же число фокальных точек четно, то разрыв имеет вид $\delta$ - функции.

## § 2. Многомерный случай.

Многомерный случай мы будем исследовать по тому же плану, что и одномерный.

### I°. Топологические предложения.

I. Мы будем рассматривать гладкую $n$-мерную поверхность $q = q(\alpha)$, $p = p(\alpha)$, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в $2n$-мерном фазовом пространстве $q, p$ или, точнее, гладкое $n$-мерное подмногообразие (возможно, открытое) $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ $2n$-мерного евклидова пространства, для которого выполняется условие $(2.2)$ гл. $1$ в каждой локальной системе координат $\alpha$. Такую

поверхность мы будем называть лагранжевым подмногообразием $\Gamma$. Условие (2.2) гл.1 означает, что $\oint p\,dq$ на $\Gamma$ локально не зависит от пути.

Множество $M$ многообразия $\Gamma$, удовлетворяющее условию $Dq/D\alpha = 0$ (как обычно, $Dq/D\alpha$ обозначает $\det \| \partial q_i / \partial \alpha_j \|$ ) называется особым.x/

Лагранжево подмногообразие $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ обладает замечательным свойством, которое позволяет обобщить понятие канонического оператора на многомерный случай. Это свойство выражается следующей леммой о локальных координатах.

Лемма 2.1

Для любой точки $\alpha^0$ на лагранжевом подмногообразии $\Gamma$ существует поворот осей $\tilde{q} = Aq$, $\tilde{p} = Ap$, такой, что некоторая окрестность точки $\alpha^0$ взаимно-однозначно проектируется на одну из $n$-мерных координатных плоскостей вида $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$

Заметим, что преобразование вида
$$\tilde{q} = Aq, \quad \tilde{p} = Ap, \qquad (2.1)$$
где $A$ – унитарная матрица, является каноническим. Напомним, что каноническим преобразованием является такое преобразование, которое оставляет инвариантным условие (2.2) гл.1

Координаты вида $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$, в которых $D\tilde{y}_k / D\alpha \neq 0$ будем называть фокальными координатами точки $\alpha$. Например, в двумерном случае утверждение леммы означает, что

---

x/ относительно проектирования на плоскость $p = 0$. [62, 8)]

16–1419

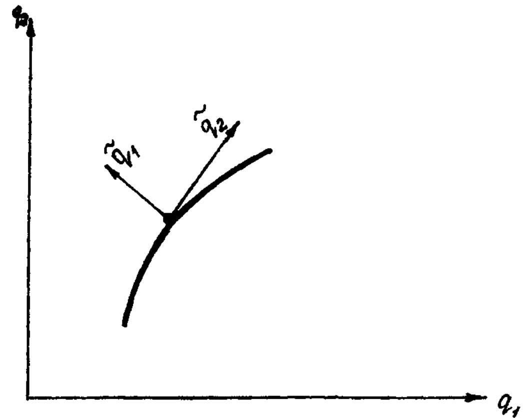



*Рис. 9а.*

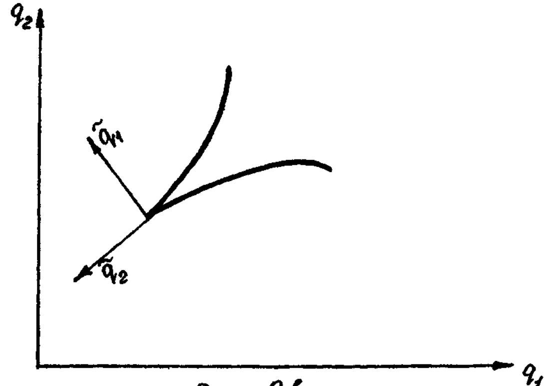



*Рис. 9б.*

*Рис. 9.*

если ранг $\| \partial q_i / \partial \alpha_j \|$ равен нулю, то $\det \| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \| \neq 0$. Если же ранг $\| \partial q_i / \partial \alpha_j \|$ равен I, и многообразие $\Gamma$ находится в общем положении [1], то проекция подмногообразия особенностей $M$ на плоскость $q$ может иметь вид кривой $\gamma$, изображенный на рис. 9а и 9в. В этом случае $\tilde{q}_1$ ортогонально $\gamma$, а $\tilde{q}_2$ направлено по касательной к $\gamma$. Утверждение леммы в данном случае означает, что отображение окрестности точки $\alpha \in M$ на плоскость $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ взаимно однозначно.

2. Эта лемма может быть использована при выборе локальных координат (локальных карт лагранжева подмногообразия). Действительно, мы можем в качестве локальной системы координат окрестности точки $\alpha \in \Gamma$ всегда вместо $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ брать фокальные координаты этой точки $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ (Для произвольного подмногообразия это не имеет места). Всякий компакт на подмногообразии $\Gamma$ мы сможем покрыть конечным числом областей, каждая из которых взаимнооднозначно проектируется на одну из координатных плоскостей вида $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$. В качестве локальных координат в такой области примем $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ (локальная карта $\tilde{\Omega}_k$). В каждой локальной карте $\tilde{\Omega}_k$ существует точка, в которой

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \alpha_i} = \dots = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

(При $k = 0$ это любая точка карты).

Выбрав произвольно одну из таких точек, назовем ее центром локальной карты. Система локальных карт такого вида, покрывающих компакт $R$, составляют канонический атлас $\mathcal{H}$ компакта $R$. Множество центральных точек обозначим через $\mathfrak{X}$.

Назовем точки, в которых якобиан $\mathcal{J}\left(\frac{q_1, \dots, q_n}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}\right) \neq 0$,

неособыми, так же как и карты, у которых $k=0$. Остальные точки и карты назовем особыми.

Введем индекс пути $\ell[\alpha^1, \alpha^2]$ на лагранжевом многообразии.

Рассмотрим лагранжево многообразие в общем положении относительно проектирования вдоль координат $p$. Оказывается, что в этом случае подмногообразие особенностей $M$ имеет размерность не более $n-1$, и ранг матрицы $\| \partial q_i(\alpha) / \partial \alpha_j \|$ при $\alpha \in M$ меньше $n-1$ лишь для размерности, меньшей x/ $n-2$.

Фиксируем точку $\alpha^0 \in M$. Произведем канонический поворот вида (2.1) и в качестве локальных координат будем рассматривать ее фокальные координаты $\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n$.

Иначе говоря, мы возьмем каноническую карту с центром в точке $\alpha^0$. Таким образом, локально $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n)$ на подмногообразии. Проведем в этой точке единичный вектор $\vec{e}$, касательный к многообразию параллельно $\tilde{p}_1$, в направлении возрастания $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$, т.е. изменения $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$ от отрицательных значений к положительным. Заметим, что в общем

---

x/ Если ранг матрицы $\| \partial q_i(\alpha) / \partial \alpha_j \|$ равен $n-r$, то из / 1 / следует, что $\dim M = n - r^2$, если $\Gamma$ находится в общем положении. В доказательстве теорем, однако, используется лишь тот факт, что $\dim M \leq n-1$. Все остальные свойства подмногообразия в общем положении используются лишь для иллюстрации.

положении / 1 / производная $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$ будет менять знак x/ вдоль $\tilde{q}_1$, при переходе через $\alpha^0$.

Таким образом получаем нормальное поле*) на подмногообразии $M$.

Пусть точки $\alpha^1$ и $\alpha^2$ - неособые. В качестве индекса (одномерного) пути $\ell[\alpha^1, \alpha^2]$ мы будем брать индекс пересечения этого пути с подмногообразием $M$. Таким образом, если путь пересекает подмногообразие $M$ в направлении вектора $\vec{e}$, то значение индекса пути увеличивается на единицу. Если же он пересекает $M$ в противоположном направлении, то значение индекса пути уменьшается на единицу.

Мы введем сейчас другое определение индекса пути, которое использует лишь тот факт, что в общем положении размерность $M$ не превосходит $n-1$.

Пусть точки $\alpha^1$ и $\alpha^2$, принадлежащие одной и той же карте $\tilde{\Omega}_k$, являются неособыми. Мы определим индекс пути $\ell[\alpha^1, \alpha^2]$ как разность индекса инерции матрицы

$$B_k = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{p}_j} \right\|_{i,j \leq k} = \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \, \partial \tilde{q}_j} \right\|^{-1}_{i,j \leq k}$$

в точке $\alpha = \alpha^1$ и индекса инерции той же матрицы в точке $\alpha = \alpha^2$.

---

x/ На этот факт и на возможность в связи с этим ввести простую геометрическую интерпретацию индекса пути мне указали Аносов Д. и Новиков С.

Индекс пути $\ell[\alpha';\alpha'']$, если $\alpha''$ - центральная точка карты $\tilde{\Omega}_{k}^{i}$, а $\alpha'$ - неособая точка этой карты, равен индексу инерции матрицы $\tilde{B}_k$ в точке $\alpha'$.

Теорема 2.1 $\mathrm{Ind}\, \ell[\alpha';\alpha'']$, где $\ell[\alpha';\alpha''] \subset \tilde{\Omega}_{k_1}$, не зависит от карты $\tilde{\Omega}_{k_1}$, т.е. если $\ell[\alpha';\alpha'']$ принадлежит одновременно $\tilde{\Omega}_{k_2}$, $\alpha'$ и $\alpha''$ - неособые, то

$$\mathrm{Ind}\, \tilde{B}_{k_1}(\alpha') - \mathrm{Ind}\, \tilde{B}_{k_1}(\alpha'') = \mathrm{Ind}\, \tilde{\tilde{B}}_{k_2}(\alpha') - \mathrm{Ind}\, \tilde{\tilde{B}}_{k_2}(\alpha'') \quad (2.2)$$

Произвольный путь $\ell[\alpha';\alpha'']$ можно покрыть картами. В каждой карте определен индекс отрезка пути x/. Индекс $\ell[\alpha';\alpha'']$ определяется в силу аддитивности индекса. Из теоремы 2.1 следует, что $\mathrm{Ind}\, \ell[\alpha';\alpha'']$ не зависит от покрытия и не меняется при непрерывной деформации пути $\ell[\alpha';\alpha'']$ в путь $\tilde{\ell}[\alpha';\alpha'']$, т.е. $\mathrm{Ind}\, \ell[\alpha';\alpha'']$ является гомотопическим инвариантом.

<u>Теорема 2.2. Индекс одномерного цикла есть целочисленный инвариант инфинитизимальных канонических преобразований.</u>

Пусть $q(t)$, $p(t)$ - решение системы Гамильтона $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$, удовлетворяющее условию: $q(0) = q^0(\alpha)$, $p(0) = p^0(\alpha)$, где $q^0(\alpha)$, $p^0(\alpha)$ определяют лагранжево подмногообразие $\Gamma$. Обозначим $q(t) = G(\alpha,t)$, $p(t) = P(\alpha,t)$

---

x/ При условии, что подмногообразие особенностей имеет размерность меньшую, чем $n$, например, многообразие $\Gamma$ находится в общем положении по отношению к проекции. Этого достаточно, поскольку общего положения можно достичь сколь угодно малым каноническим поворотом.

Подмногообразие $\Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}$, где $t$ фиксировано, является лагранжевым подмногообразием фазового пространства. Всякий путь $\ell[\alpha',\alpha''] \subset \Gamma$ отобразится на путь $\ell_t[\alpha',\alpha''] \subset \Gamma_t$. Определим индекс траектории $Q(\alpha,0,t)$. Предположим вначале, что форма $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j$ строго положительна. Известно, что в этом случае число нулей якобиана $\frac{DQ(\alpha,\tau)}{\partial\alpha}$ при $0 < \tau \leq t$ с учетом их кратности конечно. Это число мы будем называть индексом траектории $Q(\alpha;0,t)$ (индекс по Морсу).

Мы введем индекс пути и для произвольного гамильтониана $H$, не удовлетворяющего условию $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$

Рассмотрим в $2n+1$ - мерном пространстве $p,q,t$ $n+1$ - мерную пленку $R_t$, являющуюся объединением семейства $n$-мерных многообразий $\Gamma_\tau$ при $\tau$, меняющемся от $0$ до $t$. В каждой точке пленки $R_t$ в силу леммы невырождена некоторая матрица типа $\tilde{B}_k$. Поэтому мы можем покрыть пленку $R_t$ каноническими картами $\tilde{\Omega}_k$ размерности $n+1$. Мы определим индекс одномерного пути, лежащего в пленке, в том числе и индекс траектории $Q(\alpha;0,t)$.

Рассмотрим отрезок пути $\ell[\alpha',\alpha^2]$, целиком принадлежащий одной канонической карте $\tilde{\Omega}_k$ с локальными каноническими координатами $\tilde{y}_k, t$, концы которого являются неособыми точками. Аналогично тому, как это было сделано для лагранжева многообразия, определим индекс пути $\operatorname{Ind}\ell[\alpha',\alpha^2]$ как разность индексов инерции матрицы $\tilde{B}_k$, взятых последовательно в точках $\alpha'$ и $\alpha^2$. Аналогично предыдущему определяется центральная точка карты и индекс пути $\operatorname{Ind}\ell[\alpha'_k,\alpha^2]$, где $\alpha^2$ - неособая точка и $\alpha'_k$ - центральная точка, как индекс инерции матрицы $\tilde{B}_k$ в точке $\alpha^2$.

Доказательство теорем об инвариантности будет дано в главе 7. Там же мы определим индекс пути, соединяющего произвольные две точки $\alpha'$ и $\alpha^2$. Для пленки имеет место аналог теоремы 1, и индекс любого пути в $R_t$ определяется в силу аддитивности.

Мы докажем, что в случае, когда путь есть траектория $Q(\alpha;0,t)$ и условие $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_j p_i} z_j z_i > 0$ при $z_i \neq 0$ выполнено, так определенный индекс совпадает с индексом по Морсу.

2°. Определение канонического оператора.

Пусть на лагранжевом многообразии $\Gamma$ задана финитная функция $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ со значениями в гильбертовом пространстве, носитель которой есть некоторый компакт $R$. Обозначим снова через $\varphi(\alpha)$ класс, эквивалентный $\varphi(\alpha)$ в фактор-пространстве $S$. Обозначим через $\mathcal{H}$ канонический атлас, отвечающий конечному покрытию $\{\Omega^i\}$, $i=1,\dots,N$, компакта $R$, а через $e^i(\alpha)$, $i=1,\dots,N$ разложение единицы, отвечающее покрытию $\{\Omega^i\}$. ($e^i(\alpha) \in C^\infty$, $\sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha) = 1$ при $\alpha \in R$, $e^i(\alpha)=0$ при $\alpha \bar{\in} \Omega^i$). Напомним, что локальной карте $\tilde{\Omega}^i_k$ отвечает $\alpha = a^i(\tilde{y}_k)$, где $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n$. Обозначим через $\sigma(\alpha)$ некоторую меру на многообразии $\Gamma$, а через $D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k$ производную от нее по мере $d\tilde{p}_1\dots d\tilde{p}_k\, d\tilde{q}_{k+1}\dots d\tilde{q}_n$. В частности, если на $\Gamma$ можно ввести глобальные координаты $\alpha$, то можно положить, например,

$$\sigma(\alpha) = d\alpha_1\dots d\alpha_n \quad и \quad D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k = \frac{D\alpha}{D\tilde{y}_k} \equiv \det\left\|\frac{\partial\alpha_i}{\partial(\tilde{y}_k)}\right\|$$

Обозначим через $\alpha_k^j$ центральную точку карты $\tilde{\Omega}_k^j$, а одну из центральных точек назовем начальной и обозначим $\alpha^0$.

Обозначим через $j(x)$ совокупность номеров всех тех карт атласа $\mathcal{H}$, которые содержат точки плоскости $q=x$. Пусть $A$ самосопряженный положительно определенный оператор неограниченный в гильбертовом пространстве $H$, $S$ – фактор-пространство $L_2(\Gamma,H)/D(A)$, $S'$ – фактор пространство $L_2(\ell^0,H)/D(\frac{\partial}{\partial x})\cap D(A)$ Определим канонический оператор $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ из $S$ в $S'$. Этот оператор можно рассматривать также, как оператор из $L_2(\Gamma,H)$ (пространство функций с интегрируемым квадратом на $\Gamma$ со значениями в $H$) в фактор пространство $S'$. Иными словами, мы определяем $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha)\in L_2(\Gamma,H)$ с точностью до дифференцируемых функций, принадлежащих $\mathcal{D}(A)$.

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=e^{i\gamma}\sum_{j\in j(x)} e^{-\frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind}\ell[\alpha^0;\alpha_k^j]}\ \Phi_A^{\tilde{p}_k} e^j(a^j(\tilde{y}_k))\cdot \tag{2.3}$$

$$\cdot\left|D(\sigma)/D\tilde{y}_k\right|^{1/2}\exp\Big\{iA\Big[\int\limits_{\ell[\alpha^0,\alpha^j(\tilde{y}_k)]}\tilde{p}\,d\tilde{q}-\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i\tilde{q}_i[a^j(\tilde{y}_k)]\Big]\Big\}\varphi(a^j(\tilde{y}_k))\Big|_{q=x}$$

$\Phi_A^{\tilde{p}_k}$ – преобразование типа Фурье по первым $k$ переменным функции, финитной по этим переменным с носителем $R$, т.е.

$$\Phi_A^{\tilde{p}_k}\psi(\tilde{y}_k)=\frac{e^{\frac{i\pi}{4}k}A^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}}\int\limits_{R} e^{iA\sum_{j=1}^{k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j}\,\psi(\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\ldots,\tilde{q}_n)\,d\tilde{p}_1\ldots d\tilde{p}_k,$$

а $\gamma$ – некоторая линейная функция оператора $A$.

В случае отрицательно определенного $A$ по определению полагаем

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}=\text{компл. сопрям. }K_{-A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \tag{2.4}$$

Если оператор $A$ не является знакоопределенным и $A^{-1}$ существует, то поступаем согласно пункту I,8° гл. 2 x/.

**Теорема 2.3.**

Для того, чтобы канонический оператор $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ не зависел от выбора канонического атласа, путей $\ell[\alpha^0,\alpha_k^j]$

---

x/ В следующей теореме 2.4 можно рассматривать вместо гильбертова пространства $H$ банахово пространство $B$ и оператор $A$, обладающий свойствами, I),2),3) перечисленными в § I главы о. Если $A$ обладает свойствами I),2а) 3), то определяем $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ формулой (2.4), если свойствами I),3), а $B=B^+\oplus B^-$, $K_A B\subset B^{A\Gamma}_{B}$ причем в $B^+$ оператор $A$ обладает свойствами I),2),3), а в $B^-$ свойствами$_0$ I),2а),3), то $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ определяется согласно пункту I,8°, гл. 2.

и от способа разбиения единицы, необходимо и достаточно, чтобы для точек спектра $\lambda$ оператора $A$ выполнялись соотношения x/ :

$$\frac{2\lambda}{\pi} \oint_{k} p\,dq = \ell_k \,(\mathrm{mod}\, 4) + O(1/\lambda), \quad k=1,\dots,k_0 \tag{2.5}$$

где интеграл берется по $k$ - тому базисному циклу подмногообразия $\Gamma$ , $\ell_k$ - индекс этого цикла, $k_0$ - одномерное число Бетти подмногообразия $\Gamma$ .

Заметим, что условия (2.5) накладывают ограничения на значения величин $I_k = \oint p\,dq$. При $k_0=2$ для существования такого $A$ , чтобы выполнялось (2.5), достаточна несоизмеримость $I_1$ и $I_2$ .

Поскольку $\oint_k p\,dq$ и $\ell_k$ инвариантны относительно канонических преобразований, то, очевидно, указанное свойство оператора $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ также сохраняется при канонических преобразованиях.

Если начальную точку $\alpha^0$ атласа заменить на точку $\tilde{\alpha}^0$ и одновременно величину $\gamma$ заменить на

$\tilde{\gamma} = \gamma + A \int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} p\,dq - \frac{\pi}{2}\, \mathrm{Ind}\, \ell[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]$ , то канонический оператор останется неизменным.

Замечание. Для получения значений выражения $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha)$ в окрестности точки $x=\bar{x}$ удобно пользоваться следующим специальным атласом $\mathcal{H}(\bar{x})$.

Пусть пересечение плоскости $q=\bar{x}$ и $\Gamma$ состоит из конечного числа точек $\alpha^i(\bar{x})$, $i=1,\dots,i_0$. Выберем атлас

---

x/ Символ $\ell\,(\mathrm{mod}\, 4)$ означает любое число вида $\ell+4n$, где $n$ - целое.

$\mathcal{H}(\bar{x})$ так, чтобы каждая из этих точек была центральной точкой некоторой карты $\tilde{\Omega}^i_k(\bar{x})$.

Канонический оператор, отвечающий атласу $\mathcal{H}(\bar{x})$ в окрестности точки $x=\bar{x}$ будет состоять из суммы $i_0$ членов.

Заметим далее, что при выполнении условий $(2.5)$

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha)=K^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha)\qquad \tilde{\gamma}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0;\tilde{\alpha}^0]+\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}^0}p\,dq$$

Условия $(2.5)$ независимости оператора $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ от вида канонического атласа в пространстве $S$ в силу теоремы $2.1$ и инвариантности $J_k$ сохраняются при сдвиге вдоль траекторий динамической системы Гамильтона: $\Gamma\to\Gamma_t$. Мы будем всегда полагать, что $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ не зависит от разбиения на канонические карты в пространстве $S$, т.е., что соотношения $(2.5)$ выполнены.

Пусть теперь $\varphi(\alpha)$, $\alpha\in\Gamma$, является бесконечно дифференцируемой функцией $\alpha$ со значениями в некотором счетно-нормированном пространстве.

Рассмотрим линейные непрерывные операторы $e^i(\alpha,h)$, $\alpha\in\Gamma$, $h\in(0,1)$, в этом пространстве, зависящие от параметров $\alpha$ и $h$, а также от пути $\ell[\alpha^0;\alpha]$ и бесконечно дифференцируемые по $\alpha$ и $h$ при $h=0$, т.е. предположим, что выполняются соотношения вида $(1.13)$ Пусть при $h=0$ эти операторы обращаются в финитные числовые функции: $e^i(\alpha,0)=e^i(\alpha)$, которые являются элементами разложения единицы по атласу $\mathcal{H}$.

Подобно п.$5^\circ$ § I заменим в операторе $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ функ-

ции $e^i(\alpha)$ на операторы $e^i(\alpha, R_z)$. Мы получим семейство операторов $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}$, $\tilde{K}^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}$, $\tilde{\tilde{K}}^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}$, зависящих от $e^i(\alpha, R_z)$.

Теорема 2.4

Пусть лагранжеву подмногообразию $\Gamma$ сопоставлен канонический атлас $\mathcal{H}$ с начальной точкой $\alpha^0$ и некоторый оператор $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}$. Пусть $\tilde{\mathcal{H}}$ другой канонический атлас подмногообразия $\Gamma$ с начальной точкой $\tilde{\alpha}^0$. Тогда существует единственный оператор вида $\tilde{K}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}_0}_{A,\Gamma,R_z}$ равный $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}$ на функциях вида $\varphi(\alpha)$.

При этом

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + \frac{1}{h} \int_{\ell[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]} p\, dq$$

# ГЛАВА 3. <u>АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.</u>

## § I. Квазиклассическая асимптотика.

### I$^{\circ}$. Основные теоремы.

Справедливы предложения, аналогичные, полученным в гл 2, §§ 1, 2.

<u>Теорема 3.I</u>

<u>Пусть $\Gamma$ компактное лагранжево многообразие, инвариантное относительно динамической системы</u>

$$\dot{x}_i = p_i \;; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad V(x) \in C^{\infty} \lim_{|x| \to \infty} \frac{V(x)}{\sqrt{|x|^{\alpha}}} = \infty,$$

$\alpha > 0$

<u>Тогда существуют собственные значения $\lambda_N$ уравнения</u>

$$\left\{ -\Delta + \lambda_N \left[ V(x) - E \right] \right\} \psi_N = 0$$

$$\psi_N \in L_2 \left[ R^n \right],$$

17-1419

удовлетворяющие соотношениям $(2.5)$ x/.

Теорема 3.2

Пусть коэффициент $v(x,t)$ уравнения Шредингера $(1.6)$ гл. 1 – $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раза дифференцируемая функция, $\varphi(\alpha)$ дважды дифференцируема.

Пусть решение $\psi(x,t)$ уравнения $(1.16)$ гл. I удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x,0)=K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\,\varphi(\alpha) \qquad (1.1)$$

$$\Gamma=\{q^0(\alpha),\ p^0(\alpha)\} \qquad x=x_1,\dots,x_n;\quad p=p_1,\dots,p_n$$

тогда решение $\psi(x,t)$ имеет вид

$$\psi(x,t)=K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t}\,\varphi(\alpha)+z_h(x,t) \qquad (1.2)$$

$$\gamma=\frac{-\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,Q(\alpha^0;0,t)+\frac{1}{h}\int_0^t\left\{\frac{p^2(\alpha^0,\tau)}{2\mu}-v\left[Q(\alpha^0,\tau),\tau\right]\right\}d\tau,$$

где $Q(\alpha,t),\ P(\alpha,t)$ – решение уравнений Гамильтона

$$\mu\dot{Q}_i=P_i \qquad \dot{P}_i=-\frac{\partial v(Q,t)}{\partial Q_i} \qquad i=1,\dots,n$$

$$Q(\alpha,0)=q^0(\alpha)\ .\quad P(\alpha,0)=p^0(\alpha)\quad \Gamma_t=\{Q(\alpha,t),\ P(\alpha,t)\},$$

а $\int|z_h(x,t)|^2dx\to 0$ при $h\to 0$.

---

x/ Таким образом, при $E=E^0_n,\ \lambda_n=1/h$ удовлетворяются условия $\oint\limits_k p\,dq=2\pi(m_k+\ell_k/4)h+O(h^2)$, $k=1,\dots,k_0$, где $k_0$ – число Бетти многообразия $\Gamma$, $\oint\limits_k$ – интеграл по к-тому независимому циклу, $\ell_k$ – его индекс $m_k$ – любые целые числа. Эти формулы носят название в физической литературе формул Бора-Зоммерфельда, или формул квантования старой квантовой теории. В физической литературе, однако, не были найдены значения констант $\ell_k$. Было известно лишь, что $\ell_k\le 4$. [32(2)], [62].

3. Следствие. Пусть выполнены условия предыдущего предложения и пусть носитель $R$ функции $\varphi(\alpha)$ достаточно мал, настолько, что его образ $R_t$ на $\Gamma_t$ целиком лежит в одной из карт атласа $\mathcal{H}$ с локальными координатами $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n$. Пусть

$$\tilde{\Psi}(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n)=\Phi_{1/h}^{\tilde{x}_k}\quad\psi(\tilde{x},t)$$

т.е. мы рассматриваем решение $\psi(\tilde{x},t)$ в $\tilde{p}$ - представлении, по переменным $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_k$. Тогда

$$\int|\tilde{\Psi}(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n|^2 d\tilde{p}_1\dots d\tilde{p}_k\, d\tilde{x}_{k+1}\dots d\tilde{x}_n \underset{h\to 0}{\longrightarrow}\int_R \varphi^2(\alpha)\,d\alpha$$

$\alpha[\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n]\in R_t$
и стремится к нулю вне этой области (ср. гл. 2 п. 4° §1 ).

4. Обобщение понятия канонического оператора на случай, когда оператор $A$ не является положительно определенным и на случай, когда вместо $\varphi(\alpha)$ есть вектор-функция со значениями в гильбертовом или счетно-нормированном пространстве, проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано в одномерном случае.

5. Рассмотрим уравнение (1.13) гл. I при $a_1=0$, $a_2=1$, $B=0$, $A=1/h$. В частности, при $R=(\bar{\sigma}_2,H)$ оно совпадает с уравнением Паули (табл. I п. 5).

Теорема 3.3

Пусть решение $\psi(x,t)$ (функция со значениями в $B$ ) уравнения (1.16)* гл. I при $a_1=0$, $a_2=1$, $B=0$, $A=1/h$ удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x,0)=K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\,\varphi(\alpha)\,g(\alpha)\qquad \Gamma=\{q^0(\alpha),p^0(\alpha)\}\quad(1.4)$$

(уравнение Паули, см. табл. I )

$\varphi(\alpha) \in C^{\infty}$ и финитна, $g(\alpha)$ - единичный бесконечно дифференцируемый вектор. Тогда

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t,h} \varphi(\alpha) e^{i\int_0^t R[Q(\alpha,t),t]\,dt} g(\alpha),$$

где $\alpha^0$ - начальная точка на многообразии $\Gamma$,

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} Q(\alpha^0, 0, t) + \frac{1}{h} S(\alpha^0, t)$$

$Q(\alpha,t)$, $P(\alpha,t)$, $S(\alpha,t)$- решение системы Гамильтона

$$\dot{q}_i = H_{p_i}, \quad \dot{p}_i = -H_{q_i}, \quad \dot{S} = -H + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i$$

$$q(0) = q^0(\alpha), \quad p(0) = p^0(\alpha) \qquad S(0) = 0$$

$$H(q,p,t) = [p + A(q,t)]^2 - \Phi_0(q,t)$$

$$\Gamma_t = \{ Q(\alpha,t),\ P(\alpha,t) \}, \quad R(Q,t) = ie(\bar{\sigma}_1, \bar{H}(Q,t))$$

6. Для интеграла от квадрата модуля вектор функции $\psi(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n)$ при начальных условиях, локализованных в окрестности точки $x_0$, справедливо предложение 3. Однако, для интеграла от каждой компоненты вектора $\psi$ предложение 3. выполняться не будет. Для уравнения Паули это означает, что классической частице соответствует некий вектор (спиновая ось), который меняется вдоль траектории по закону

$$\bar{\tau}(\alpha,t) = e^{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]\,d\tau}\, \bar{\tau}(\alpha,0),$$

т.е. спиновая поляризация имеет классический предел.

$2^0$. Метод стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана.

Функция Грина $\mathcal{G}(x,\xi,t)$ (фундаментальное решение) уравнения Шредингера удовлетворяет, очевидно, начальному условию (1.14)' гл.2 при $\Gamma = \{q(\alpha) = \xi,\ p(\alpha) = \alpha\}$ и $\varphi(\alpha) = 1$. Вместе с тем, как известно, функция Грина может быть представлена в виде фейнмановского континуального интеграла, который формально представляется в виде ([80], [35], [27])

$$\Phi = \int exp\{\tfrac{i}{h}\Theta\} \prod dq(\tau),$$

где

$$\Theta = \int_0^t L(\dot q, q, \tau)d\tau,\quad q = q(\tau),\quad q(0) = \xi,\ q(t) = x;(a);\ L(\dot q, q, \tau) = \frac{\dot q^2}{2} - v(q,\tau)$$

Аналогично предыдущему примеру, нетрудно убедиться, что если уравнение $\delta\Theta = 0$ при условии $(a)$ имеет конечное число решений $q^k = q^k(\tau, t, x, \xi)$, $k = 1,\dots,k_0$, а вторая вариация $\delta^2\Theta$ при $q = q^k$ не имеет нулевого собственного значения, то

$$\Phi = \mathcal{G}(x,\xi,t) \approx (2\pi i h)^{-1/2} \sum_k |D(q^k)|^{-1/2} exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2} + \frac{i}{h}\int_0^t L(\dot q^k, q^k, \tau)\,d\tau\right\},$$

где $\gamma_k$ – число отрицательных собственных значений второй вариации для экстремали $q^k$ x/, а $D(q^k) = (D(p^k(0))/Dx)^{-1}$, где $p^k(0)$ – начальный импульс экстремали $q^k$. Эта формула является континуальным аналогом метода стационарной фазы для интеграла $I = \int exp\{\frac{i}{h}\mathcal{F}(x)\}dx$, $x \in R^n$, который при некоторых условиях представляется при $h \to 0$ формулой (см. гл.6 §2)

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2} \sum_k |D(x^k)|^{-1/2} exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2} + \frac{i}{h}\mathcal{F}(x^k)\right\},$$

если число решений $x^k$ уравнения $d\mathcal{F} = 0$ конечно, и

---

x/ Как известно, [83] $\gamma_k$ равно индексу по Морсу.

17-1419

матрица $A$ формы $d^2\mathcal{F}$ не имеет при $x = x^k$ нулевого собственного значения. Здесь $\gamma^k$ - число отрицательных собственных значений матрицы $A$, а $D(x) = \det A$ [79,2].

## § 2. Асимптотика решений релятивистских уравнений.

I. Рассмотрим уравнение (1.16) гл. I и предположим, что его коэффициенты принимают значения, приведенные в таблице I с I по 4 строку (уравнения волновое, Максвелла, Дирака, Клейна-Гордона-Фока).

В этом случае уравнение (1.16) гл. I можно переписать в более простом виде

$$\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial t} - iA\,\Phi(x,t)\Big]^2 - c^2(x,t)\Big[(\nabla + iA\mathcal{A}(x,t))^2 + A^2\gamma^2\Big] + \sum_{k=1}^{n} B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + iA\,R(x,t)\Big\}\psi(x,t) = 0\,, \qquad (2.1)$$

где $\psi(x,t)$ - вектор-функция: $\psi(x,t) = \psi_1, \ldots, \psi_s$, а коэффициенты принимают одно из следующих 4-х значений:

| Уравнение | $\Phi(x,t)$ | $c^2(x,t)$ | $\mathcal{A}(x,t)$ | $\gamma$ | $B_k(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$ | $R(x,t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Волновое | 0 | $c^2(x,t)>0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Максвелла | $c^2(x,t)>0$ | 0 | 0 | 0 | см.табл. № I | I |
| Дирака | $\Phi(x,t)$ потенциал | $c^2=const$ | $\mathcal{A}(x,t)= =\mathcal{A}_1(x,t),\ldots,\mathcal{A}_n(x,t)$. | $mc$ - const | 0 | $\frac{e}{c}(\bar{\sigma},\bar{H}) - i(\alpha,E)$ |
| Клейна-Гордона-Фока | -"- | -"- | векторн. потенц. -"- | -"- | 0 | 0 |

Таблица 2.

Характеристическое уравнение для (2.1) имеет вид

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Phi(x,t)\right]^2 - c^2(x,t)\left\{\left[\nabla S + \mathcal{A}(x,t)\right]^2 + \gamma^2\right\} = 0 \qquad (2.2)$$

Двум ветвям решения этого уравнения (относительно $\partial S/\partial t$ )

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = H^\nu(x, \nabla S^\nu, t)$$

$$H^\nu(x, p^\nu, t) = \Phi(x,t) + (-1)^\nu c(x,t)\sqrt{|p^\nu + \mathcal{A}(x,t)|^2 + \gamma^2}$$

соответствуют две $(\nu = 1,2)$ системы бихарактеристических уравнений:

$$\dot{q}_i^{\nu} = -\frac{\partial H^{\nu}(q^{\nu}, p^{\nu}, t)}{\partial p_i^{\nu}}; \quad \dot{p}_i^{\nu} = \frac{\partial H^{\nu}(q^{\nu}, p^{\nu}, t)}{d q_i^{\nu}} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$q = q_1, \ldots, q_n, \qquad p = p_1, \ldots, p_n \qquad \nu = 1, 2 \tag{2.4}$$

$$\dot{S}^{\nu} = H^{\nu} - \sum_i^n p_i^{\nu} H_{p_i}^{\nu}$$

Пусть $q(0) = q^{\circ}(\alpha)$, $p(0) = p^{\circ}(\alpha)$, $S^{\nu}(0) = 0$,

$\Gamma\{q^{\circ}(\alpha), p^{\circ}(\alpha)\}$ – лагранжево многообразие.

Обозначим

$$\overset{\nu}{Q}(\alpha, t) = \overset{\nu}{q}(t); \quad \overset{\nu}{P}(\alpha, t) = \overset{\nu}{p}(t), \quad \overset{\nu}{S}(\alpha, t) = \overset{\nu}{S}(t)$$

$$\overset{\nu}{\Gamma}_t = \{\overset{\nu}{Q}(\alpha, t), \overset{\nu}{P}(\alpha, t)\}. \tag{2.5}$$

2. Имеет место следующая

<u>Теорема 3.4.</u>

Пусть $\tau^{\nu}(\alpha)$ $(\nu = 1, 2)$ – две произвольные единичные бесконечно дифференцируемые вектора-функции,

а $\varphi^{\nu}(\alpha)$, $(\nu = 1, 2)$ – произвольные финитные функции на $\Gamma$ со значениями x/ в $H$.

Существуют решения уравнения (2.1), которые могут быть представлены в виде

$$\psi^{\nu}(x, t) = K_{A, \Gamma, R_+}^{\gamma, \alpha^{\circ}} \frac{c[\overset{\nu}{Q}(\alpha, t), t]}{c[q^{\circ}(\alpha), 0]} \left\{ \frac{|p^{\circ}(\alpha) + A[\overset{\circ}{q}(\alpha), 0]|^2 + \gamma^2}{|P^{\nu}(\alpha, t) + A[\overset{\nu}{Q}(\alpha, t), t]|^2 + \gamma^2} \right\}^{1/2} \overset{\nu}{\varphi}(\alpha)$$

$$\cdot \exp\left\{ i \left[ \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^n P_k^{\nu}(\alpha, t) B_k[\overset{\nu}{Q}(\alpha, t), t] + R[\overset{\nu}{Q}(\alpha, t), t] \right\} dt \right] \right\} \tau^{\nu}(\alpha)$$

$$\nu = 1, 2 \tag{2.6}$$

---

x/ Можно также брать $\varphi(\alpha)$ со значениями в пространстве обобщенных функций в $H$. Если $A = i\frac{\partial}{\partial \tau}$, то $\overset{\nu}{\varphi}(\alpha)$ может быть равно обобщенной функции $\tau$: $\delta(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\tau^{+}, \ldots$

$$\gamma^{\nu} = \frac{1}{h} S^{\nu}(\alpha^{\circ};t) - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} Q^{\nu}(\alpha^{\circ};Q\,t)$$

Коэффициенты (матрицы $s\times s$ $e^{\nu}_{ij}(\alpha)$ ) для $\psi^{\nu}(x,t)$ , зависящие от $t$ , как от параметра, могут быть найдены после подстановки $\psi^{\nu}(x,t)$ в уравнение $(2.1)$ и приравнивания нулю коэффициентов при степенях $R_2$.
Такая процедура возможна в силу теоремы 3.4

3. Элементарным образом может быть найдено решение уравнения $(2.1)$ $\psi(x,t)$ как линейная комбинация $\sum_{\nu=1}^{2} C_{\nu} \psi^{\nu}(x,t)$ указанных решений $\psi^{\nu}(x,t)$ и удовлетворяющее начальным условиям вида

$$\psi(x,0) = K^{\gamma,\alpha^{\circ}}_{A,\Gamma,R_2} \varphi(\alpha)\tau(\alpha)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0$$

(при произвольных ограниченных $s\times s$ матрицах $e_{ij}(\alpha)$)
или

$$\psi(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = K^{\gamma,\alpha^{\circ}}_{A,\Gamma,R_2} \varphi(\alpha)\tau(\alpha)$$

(при произвольных ограниченных $s\times s$ матрицах $e_{ij}(\alpha)$).

В пространстве $S$ (т.е. в нулевом приближении по $R_2$) в первом случае, например, нужно положить

$$\varphi^{\nu}(\alpha) = \Phi(q^{\circ}_{1}(\alpha),0) + (-1)^{\nu} c(q^{\circ}(\alpha),0)\sqrt{|p^{\circ}(\alpha) + \mathcal{A}(q^{\circ}(\alpha),0)|^{2} + \gamma^{2}}$$

и взять полусумму решений $\psi^{\nu}(x,t)$, $\nu = 1,2$ .

§ 3 Примеры и следствия.

I. Если $H = L_2[1,\infty]$ пространство функции от $\omega$, а $A$ - оператор умножения на $i\omega$, то поставленная задача в случае уравнений волнового и Максвелла является задачей о коротковолновой асимптотике решений этих уравнений. В частности, когда $\Gamma_t$ при $t=0$ есть плоскость $p=p_0$, параллельная координатной плоскости $q$, то решение $\psi^1(x,t)$ соответствует случаю, когда в начальный момент имеется плоская волна импульса $p_0$. Подробно физический смысл такой постановки и связь ее с приближением геометрической оптики изложена в 5-м издании книги Куранта и Гильберта [38]. Там речь идет о постановке и решении задачи в малом, т.е. при таких $t \le t_0$, при которых бихарактеристики не пересекаются и якобиан $DX/Dx_0$ не обращается в нуль (ср. I°§ I гл. I).

Из (2.6) следует переход от волновой оптики в геометрическую в целом. В частности для $\psi(x,t)$ справедливо утверждение, аналогичное 3 и 6, §1, п 1°. Получается также, что поляризация решения уравнения Максвелла имеет коротковолновый предел, а значит может наблюдаться в геометрооптическом приближении. Каждому геометро-оптическому лучу нужно поставить в соответствие вектор $\vec{e}(t)$, который меняется вдоль луча. Для электрического поля $\vec{E}$ вектор $\vec{e}$ имеет вид $\vec{e}_E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\vec{u}$, для магнитного $\vec{H}$, $\vec{e}_H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{u}$, где $\vec{u}$ - единичный вектор, удовлетворяющий уравнению (ср. [13],[68])

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -(\vec{u}\,\mathrm{grad}\,\ln n)\,\vec{p}(\alpha,t). \qquad (3.1)$$

где $n = c\sqrt{\mu\varepsilon}$

Эта формула справедлива для любого времени $t$. Таким образом, наличие фокальных точек не сказывается на классической поляризации: поляризация не меняется при переходе через фокальные точки.

2. Аналогичное утверждение справедливо и относительно поляризации спина уравнения Дирака (см. [15],[51,2)] ). Два решения $\psi^{\nu}(x,t)$ $\nu=1,2$ в уравнении Дирака соответствуют электрону и позитрону [81,1)],[86].

Начальные условия уравнения Дирака удовлетворяют соотношениям (II). Эти соотношения накладывают ограничения на векторы $\vec{\tau}^{\nu}(\alpha)$ $\nu=1,2$ в формуле (2.6). Именно оказывается, что вектор $\vec{\tau}^{\nu}(\alpha)$ является нуль-вектором характеристической матрицы

$$C^{\nu}=(-1)^{\nu}\sqrt{(c\nabla S_0+c\mathcal{A})^2+m^2c^4}\cdot I-\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\left(c\frac{\partial S}{\partial x_k}-e\mathcal{A}_k\right)+\alpha_4 mc^2, \quad (3.2)$$

где $I$ - единичная матрица.

Ранг матрицы $C^{\nu}$ равен 2, поэтому существует 2 линейно независимых вектора, $\vec{\tau}_i^{\nu}$, $i=1,2$, которые она переводит в нуль.

Система векторов $\vec{\tau}_i^{\nu}$, $i=1,2$, $\nu=1,2$, образует базис в 4-х мерном векторном пространстве, поэтому любое решение уравнения Дирака удовлетворяющее начальному условию $\psi(x,0)=K_{1/h,\Gamma,\lambda}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ можно представить в виде линейной комбинации выражений (2.6) если положить в этой формуле $\vec{\tau}_i^{\nu}=\tau_\nu$, $\nu=1,2$, $i=1,2$.

3. Рассмотрим решение $\psi^1(x,t)$ волнового уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$\psi(x,0)=\varphi(x)e^{iAf(x)}g$, $A=i\frac{\partial}{\partial\tau}$; $g$ - обобщенная функция $\tau$.

Пусть начальное многообразие

$\Gamma = \{q=\alpha,\ p=\operatorname{grad} H(\alpha)\}$ удовлетворяет соотношению $|p^0(\alpha)|^2 c^2(\alpha,0) = const$ (3.3)

Пусть плоскость $q=x$ пересекается с $\Gamma_t$ только в неособых точках. Тогда число этих точек конечно. Иначе говоря, точка $(x,t)$ не является фокальной, и уравнение $Q(\alpha,t)=x$ имеет конечное число решений $\alpha^1,\dots,\alpha^k$. Поскольку они зависят от $x,t$, будем писать $\alpha^i(x,t)$ $1\le i\le k$. В силу (2.6) решение $\psi^1(x,t)$ имеет вид

$$\psi^1(x,t)=c(x,t)\sum_{j=1}^{k}\varphi[\alpha^j(x,t)]\,c^{-1}[\alpha^j(x,t),0]\cdot$$

$$\cdot\left|\det\left\|\frac{\partial Q}{\partial\alpha_\ell}[\alpha^j(x,t),t]\right\|\right|^{-1/2} Re\left[\exp\left\{-\frac{i\pi\gamma^j}{2}+iAf[\alpha^j(x,t)]\right\}\right.\cdot$$

$$\cdot\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m[\alpha^j(x,t),t]R_z^m\right]g\ , \qquad (3.4)$$

где $\gamma^j$ – индекс по Морсу пути $Q(\alpha^j;0,t)$ т.е. число нулей

$$J(\alpha^j,\tau)=\det\left\|\frac{\partial Q(\alpha^j,\tau)}{\partial\alpha^j_\ell}\right\|$$

при $0<\tau\le t$

После подстановки выражения (3.4) в волновое уравнение и приравнивания нулю коэффициентов при степенях $R_z$, получим, что $\varphi_m[\alpha^j(x,t),t]$ удовлетворяют уравнениям:

$$iA\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}=\frac{c(\alpha^j,0)}{c[Q(\alpha^j,t),t]}\sqrt{|J(\alpha^j,t)|}\ \Box_{\alpha^j,t}\frac{c[Q(\alpha^j,t),t]}{c(\alpha^j,0)\sqrt{|J(\alpha^j,t)|}}\varphi_{m-1}$$

где $\Box_{\alpha^j, t}$ - оператор Д'Аламбера в "криволинейных" координатах $\alpha^j, t$.

Пусть $g = \Theta(\tau)$, тогда

$$\mathrm{Re}\left[e^{-\frac{i\pi}{2}\gamma^j} e^{if[\alpha^j(x,t)]\frac{d}{d\tau}}\Theta(\tau)\right] = \begin{cases} (-1)^{-\frac{\gamma^j}{2}}\Theta[\tau - f[\alpha^j(x,t)]] & \text{при } \gamma^j \text{ чётном} \\ \dfrac{(-1)^{-\frac{\gamma^j-1}{2}}}{\pi}\ln|\tau - f[\alpha^j(x,t)]| & \text{при } \gamma^j \text{ - нечётном} \end{cases}$$

Совершенно аналогичное утверждение справедливо относительно $\psi^{(2)}(x,t)$. Отсюда получается решение задачи (1.1)-(1.2) гл. 1 в целом в случае, когда точка $(x,t)$ не является фокальной.

4. Если точка $(x,t)$ фокальная, то асимптотика решения по теореме 3.3 представляется в виде интеграла такой кратности, каков дефект (порядок минус ранг) матрицы $\left\| \frac{\partial Q_i(\alpha,t)}{\partial \alpha_j} \right\|$ в точке $(x,t)$. Рассмотрим здесь случай, когда многообразие $\Gamma_t$ находится в общем положении, и дефект равен I.

Пусть задано волновое уравнение, с коэффициентом, не зависящим от времени. Предположим, что носитель $R$ функции $\varphi(\alpha)$ столь мал, что его образ $R_t$ принадлежит только одной карте атласа $\mathcal{H}$. Пусть $\psi(x,0) = \varphi(x)\exp[i\omega f(x)]$ и $c^2(x)|\mathrm{grad}\, f(x)|^2 = \mathrm{const}$.

Пусть $\tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ - локальные координаты канонической карты.

Обозначим через $\tilde{p}_1'$ значение импульса $\tilde{p}'$ в центральной точке карты.

Асимптотика при $\omega \to \infty$ функции $\psi'(x,t)$ имеет вид

$$\psi'(x,t) = \frac{e^{-\frac{i\gamma\pi}{2}}\sqrt{i\omega}}{\sqrt{2\pi}} c(x) \int_{\tilde{p}_1'-\varepsilon}^{\tilde{p}_1'+\varepsilon} \mathcal{F}(\tilde{p}_1)\,\varphi(\alpha) \left| \frac{\partial \tilde{p}_1 \partial \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n}{\partial \alpha_1 \ldots \partial x_n} \right|^{-1/2} c^{-1}(\alpha) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[i\omega f(\alpha)\right] \exp\left[i\omega(\tilde{x}_1 - \tilde{X}_1(\alpha,t))\tilde{p}_1\right] d\tilde{p}_1 + O(1/\sqrt{\omega}),$$

где $\alpha = \alpha(\tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, t)$ находится из уравнений:

$\tilde{p}_1 = \tilde{P}_1(\alpha, t)$, $\tilde{x}_i = Q_i(\alpha,t)$, $n \geq i \geq 2$ ; функция $\mathcal{F}(\tilde{p}_1) = 1$ при $\tilde{p}_1' - \frac{\varepsilon}{2} \leq \tilde{p}_1 \leq \tilde{p}_1' + \frac{\varepsilon}{2}$, $\mathcal{F}(\tilde{p}_1) = 0$ при $\tilde{p}_1 > \tilde{p}_1' + \varepsilon$, $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_1' - \varepsilon$ и является достаточно гладкой, $\gamma$ - число нулей $\det \left\| \frac{\partial Q_i(\alpha,\tau)}{\partial \alpha_j} \right\|$ вдоль полуинтервала $0 < \tau \leq t$.

В двумерном случае, например, при наших условиях ранг матрицы $\left\| \frac{\partial Q_i(\alpha,t)}{\partial \alpha_j} \right\|$ не может быть меньше I. Поэтому любая фокальная точка выражается с помощью одномерного интеграла. Например, если проекция многообразия особенностей на плоскость (каустика) имеет вид неособой гладкой кривой, $x = x'$ - проекция центра карты, то оси $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ направлены соответственно по касательной и нормали к кривой в точке $x'$. Интеграл в этом случае можно упростить: разлагая подынтегральное выражение по степеням $\varepsilon$, мы придем к сумме функции Эйри и ее производной (см. [79,1)] x) ) В случае, когда каустика имеет вид изображенный на рис. 9, интеграл также упрощается после разложения по степеням $\varepsilon$, однако к функции Эйри уже не приводится.

---

x/ Впервые, по-видимому, многомерные формулы работы [79.I] были приведены в дипломной работе И.А.Гордеевой.

## § 4. Система уравнений теории упругости

Рассмотрим систему уравнений теории упругости:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{u}+\mu\,\Delta\bar{u}+\mathrm{grad}(\lambda\,\mathrm{div}\,\bar{u})+2\,\mathcal{D}\,\mathrm{grad}\,\mu=\rho\,\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2},$$

где $\lambda=\lambda(x)>0,\quad \mu=\mu(x)>0,\quad x=x_1,x_2,x_3,$

(коэффициенты Ламэ) $\rho=\rho(x)$ -

(плотность среды) -заданные функции $x$ , принадлежащие $C^{\infty}$.

$$\mathcal{D}=\|\varepsilon_{ij}\|=\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\| -$$

- тензор деформации.

Характеристический многочлен имеет 4 действительных корня. Им соответствуют следующие характеристические уравнения [30], [48]

$$\frac{\partial S_1^{\sigma}}{\partial t}=(-1)^{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\left|\mathrm{grad}\,S_1^{\sigma}\right| \qquad \sigma=1,2$$

$$\frac{\partial S_2^{\sigma}}{\partial t}=(-1)^{\sigma}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\left|\mathrm{grad}\,S_2^{\sigma}\right| \qquad \sigma=1,2$$

Эти уравнения в свою очередь определяют и системы уравнений бихарактеристик:

$$\frac{dx_\beta^{\sigma}}{dt}=(-1)^{\sigma}a_\beta(x_j^{\sigma})\frac{p_\beta^{\sigma}}{|p_\beta^{\sigma}|} \qquad \sigma=1,2,\ \beta=1,2,\quad i=1,2,3$$

$$\frac{dp_\beta^{\sigma}}{dt}=(-1)^{\sigma+1}\mathrm{grad}\,a_\beta(x_\beta^{\sigma})\,|p_\beta^{\sigma}| \qquad x_\beta^{\sigma}=(x_{\beta1}^{\sigma},x_{\beta2}^{\sigma},x_{\beta3}^{\sigma}),\quad p_\beta^{\sigma}=(p_{\beta1}^{\sigma},p_{\beta2}^{\sigma},p_{\beta3}^{\sigma})$$

$$a_\beta(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}} & \text{при } \beta=1\\[2ex] \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} & \text{при } \beta=2\end{cases}$$

Пусть $\Gamma_\beta^\sigma$ - некоторое 3-х мерное лагранжево многообразие в 6 мерном фазовом пространстве

$$\Gamma_\beta^\sigma = \{ \overset{\circ}{x}{}_\beta^\sigma(\alpha), \ \overset{\circ}{p}{}_\beta^\sigma \}$$

Положим в выписанной системе Гамильтона

$$x_\beta^\sigma(0) = \overset{\circ}{x}{}_\beta^\sigma(\alpha), \quad p_\beta^\sigma(0) = \overset{\circ}{p}{}_\beta^\sigma(\alpha)$$

и обозначим, как обычно

$$x_\beta^\sigma(t) = X_\beta^\sigma(t,\alpha), \qquad p_\beta^\sigma(t) = P_\beta^\sigma(t,\alpha)$$

$$\Gamma_{\beta t}^\sigma = \{ X_\beta^\sigma(t,\alpha), \quad P_\beta^\sigma(t,\alpha) \} -$$

образ Лагранжева многообразия $\Gamma_\beta^\sigma$ при сдвиге вдоль решений системы Гамильтона, отвечающей функции $S_\beta^\sigma$.

Теорема 3.5

Существуют решения $u_1^\sigma$ $\sigma=1,2$ уравнения упругости, имеющие следующий вид

$$u_1^\sigma = K^{\gamma^\alpha_\sigma, \alpha^0}_{A, \Gamma_{1t}^\sigma, R_t^{(x)} \varphi_1^\sigma(\alpha)} \frac{\sqrt{\lambda [X_1^\sigma(\alpha,t) + 2\mu [X_1^\sigma(\alpha,t)]}}{\rho(X_1^\sigma(\alpha,t)} \cdot P_1^\sigma(\alpha,t),$$

где $\varphi_1^\sigma(\alpha) \in C^\infty$, $\sigma=1,2$ две произвольные финитные функции на $\Gamma$ со значениями в $H$, а

$$\gamma^\sigma = -\frac{\pi}{2} \, \mathrm{Ind} \, \ell[\alpha^0, \alpha_t^0] - A \int_{\ell[\alpha^0; \alpha_t^0]} (H dt - \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i)$$

Пусть $\vec{n}^\sigma(\alpha,t)$ и $\vec{v}^\sigma(\alpha,t)$ - единичные векто-

ры в 3-х-мерном пространстве, ортогональные между собой и ортогональные вектору $R_2^{\sigma}(\alpha,t)$ Существуют решения уравнения упругости, имеющие следующий вид.

$$u_2^{\sigma} = K_{A,\Gamma_{2t}^{\sigma},R_z}^{\gamma^{\alpha},\alpha_t^{0}}(x)\,\varphi_2^{\sigma}(\alpha)\,\frac{1}{\sqrt{\rho[X_2^{\sigma}(\alpha,t)]}}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\vec{n}^{\sigma}(\alpha,t)\cos\int_0^t\Big(\frac{\partial\vec{n}^{\sigma}(\alpha,t)}{\partial t},\vec{\nu}^{\sigma}(\alpha,t)\Big)dt+\vec{\nu}^{\sigma}(\alpha,t)\cdot$$

$$\cdot\sin\int_0^t\Big(\frac{\partial\vec{\nu}^{\sigma}(\alpha,t)}{\partial t},\vec{n}^{\sigma}(\alpha,t)\Big)dt\Big\},$$

где $\gamma^{\sigma} = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha_0^{0},\alpha_t^{0}] - A\int\limits_{\ell[\alpha_0^{0},\alpha_t^{0}]}\big(H\,dt-\sum_{i=1}^{n}p_i\,dq_i\big),$

а $\varphi_2^{\sigma}\in C^{\infty}$ $\sigma=1,2$

- любые финитные бесконечно дифференцируемые функции на со значениями в $H$.

Обычно оператор $A=i\frac{\partial}{\partial\tau}$, а $\varphi(\alpha)$ - некоторая "разрывная" функция $\tau$ (напр. $\tau_+^{\cdot}$, $\delta(\tau)$, $\Theta(\tau)$, и т.д.), умноженная на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha$ со значениями из прямой.

Линейная комбинация решений $u_i^{\sigma}$ в силу произвольности функций $\varphi_i^{\sigma}$ $i=1,2,$ $\sigma=1,2$

может удовлетворить произвольным начальным условиям вида:

$$\bar{u}(x,0) = K_{A,\Gamma_1,R_z}^{0,\alpha^{0}}(x)\,\bar{\varphi}_0(\alpha)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(x,0) = K_{A,\Gamma_2,R_z}^{0,\alpha^{0}}(x)\,\bar{\psi}_0(\alpha)$$



18-1419

## § 5. Стационарный случай

Пусть выполнено условие (3.3)

Если мы положим $A = i\frac{d}{dt}$ , то можно будет записать волновое уравнение в виде:

$$c^2(x)\Delta\psi - A^2\psi = 0 \qquad (5.1)$$

Это также по нашей классификации волновое уравнение. Если положить $A = \omega$ , то мы придем к уравнению Гальмгольца. Переход от $i\frac{\partial}{\partial t}$ к оператору умножения на $\omega$ совершается с помощью преобразования Фурье.

Поскольку в физике постановка задачи для уравнения Гельмгольца восходит всегда к постановке задачи Коши для волнового уравнения, естественно говорить о решении уравнения Гельмгольца, индуцированном решением данной задачи Коши для волнового уравнения.

Аналогичная ситуация имеет место для стационарного и нестационарного уравнений Шредингера.

Таким образом, формально можно определить решение $\psi(x,\omega)$ уравнения (5.1) при $A=\omega$ индуцированное задачей (1.1), (1.2) гл. 1 как преобразование Фурье по $t$ $(0 \le t \le \infty)$ от решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2) гл. 1 как от обобщенной функции $t$ , принадлежащей некоторому пространству обобщенных функций $K$ . Пространство $K$ при этом определяется поведением функции $u(x,t)$ при $t \to \infty$. Тогда асимптотическое разложение $u(x,t)$ по степеням $R_z$ перейдет в асимптотическое разложение

решения $\psi(x,\omega)$ как обобщенной функции $\omega$ пространства $\tilde{K}$ (по степеням $1/\omega$ ). Не уточняя пространство $K$ и пространства основных функций, мы можем сформулировать очевидное следствие из (2.6):

$$\psi(x,\omega) = c(x)\, K^{\gamma,\alpha^0}_{\omega,r} \frac{\varphi(\alpha)}{c[\alpha]} + \Phi(x,\omega) ,$$

где $\Phi(x,\omega)$ такова, что $\omega\,\Phi(x,\omega)$ принадлежит данному пространству обобщенных функций $\tilde{K}$ .

В точках, не являющихся фокальными мы можем использовать формулу (3.4) . Однако, при $t\to\infty$ число $K^0$ может вообще говоря, стремиться к $\infty$ . Поэтому для улучшения сходности ряда, добавим под знак суммы член $\left(1-\frac{1}{1+A^2}\right)^i$ . От этого первый член асимптотики не изменяется. Тогда преобразование Фурье по $t$ первого члена для функции Грина в нефокальных точках будет иметь вид:

$$\psi(x,\xi) = c(x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left\{i\omega\left[\int_0^{t_k} c^{-2}[Q(\alpha^k,\tau)]\,d\tau\right] - \frac{i\pi\gamma^k}{2}\right\}}{\sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial Q_i(\alpha^k,t^k)}{\partial\alpha_j^k}\right\|\right|}\,\left|c[Q(\alpha^k,0)]\right|\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^k}$$

где $Q(\alpha,t)$ решение системы

$$\dot{Q}_i = P_i \quad ; \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial C^{-2}(Q)}{\partial Q} \qquad i=1,\dots,n$$

$$P(\alpha,0)=\alpha, \qquad Q(\alpha,0)=\xi \qquad |\alpha|^2=c^2(\xi),$$

$$\text{а } \alpha^k=\alpha^k(x,\xi), \quad t^k=t^k(x,\xi)$$

находятся из уравнения $X(\alpha_0^k, \xi, t^k) = x$. Повидимому эта асимптотика справедлива и в случае, когда $c^{-2}(x) = E - v(x)$, и мы имеем стационарное уравнение Шредингера (уравнение смешанного типа). На примерах можно показать, что полюса функции $(5.2)$ (т.е. точки $E = E_n^0$ в которых ряд $(5.2)$ расходится) и вычеты в этих точках определяют (приближенно) не только собственные значения и собственные функции уравнения Шредингера, как это следовало бы ожидать, но и так называемые квазистационарные уровни и резонансные точки (ср. [51, 4]).

Эта формула может быть получена другим методом, который дает более точную оценку. Кроме того, можно написать также и асимптотику функции Грина в фокальных точках. В настоящей работе мы, однако, не будем этого делать, поскольку это требует дополнительных конструкций.

Формула $(5.2)$, точнее ее аналог для граничной задачи первого рода является обобщением известного метода "отражений", применяемого при построении функций Грина для прямоугольника.

Задача о коротковолновом асимптотическом разложении решения уравнения $(5.1)$, когда $c^{-2}(x) = E - v(x)$, эквивалентна задаче о квазиклассической асимптотике решения задачи на собственные функции оператора Шредингера

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi + v(x)\psi = \lambda_k \psi \qquad x = x_1, \ldots, x_n \qquad (5.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1$$

Асимптотика здесь ищется по двум параметрам одновременно:

$$h \to 0, \quad \kappa \to \infty \qquad (5.4)$$

причем так, что $\kappa h \to const$. В случае, когда $v(x)$ растет как полином, такая асимптотика совпадает с асимптотикой по одному параметру: $\kappa \to \infty$

Эта задача эквивалентна задаче об асимптотике решения уравнения ( $5.1$ ) при $\omega \to \infty$, $c^{-2} = E - v(x)$ эту последнюю задачу мы уже ставили в теореме $3.1$ Мы сформулируем сейчас более общую теорему относительно решения задачи $(5.3)$.

Теорема $3.6$

Пусть семейство компактных канонических многообразий $\Gamma(E)$ непрерывно зависит от параметра $E \in \mathcal{E} = \{\overset{\circ}{E} - \varepsilon, \overset{\circ}{E} + \varepsilon\}$ и является инвариантным относительно динамической системы

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial v(q)}{\partial q_i}, \quad \mu \dot{q}_i = p_i \quad i = 1, \dots, n \quad H(p,q) = \frac{p^2}{2\mu} + v(q)$$

$$H\big|_\Gamma = E, \quad p = p_1, \dots, p_n \quad q = q_1, \dots, q_n \qquad (5.5)$$

где $v(q)$ при $|q| \to \infty$ стремится к $\infty$ и является бесконечно дифференцируемой функцией. Пусть $\mu(E)$ – собственное значение, а $\chi(\alpha)$ – собственная функция унитарного оператора сдвига динамической системы $(5.5)$, отвечающего инвариантной мере $\sigma(\alpha)$, т.е.

$$i \frac{\delta}{\delta t} \chi(\alpha) = \mu(E) \chi(\alpha) \quad \left( \frac{\delta}{\delta t} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

Тогда существуют собственные значения $\lambda^\kappa(h)$ оператора Гамильтона



18* –1419

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta + v(x) \qquad x = x_1, \dots, x_n \qquad (5.6)$$

такие, что $\lambda^k(h) - E^k + \mu(E^k)h = O(h^2)$,

где $E^k$ — некоторый набор из $\mathcal{E}$, зависящий от $h$ и такой, что на $\Gamma(E^k)$ удовлетворяются условия

$$\frac{2}{\pi h}\oint_i p\,dq = \ell_i \,(\mathrm{mod}\, 4), \qquad i = 1, \dots, i_0$$

где $i_0$ - число Бетти многообразия $\Gamma$, $\oint_i$ - интеграл по $i$ -тому независимому циклу, $\ell_i$ - его индекс. Пусть $E_{\Delta\lambda}$ - спектральная функция интервала $\Delta\lambda$, тогда

$$\left\| \left[E_{\Delta\lambda} - 1\right] K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^k)} \chi(\alpha) \right\|_{L_2} = O(h), \quad (5.7)$$

где $\Delta\lambda = \{E^k - o(h),\ E^k + o(h)\}$.

Изложенный ниже метод позволяет также найти приближения собственных значений с точностью до $O(h^N)$, где $N$ -любое целое число и сузить в соотношении $(5.7)$ интервал $\Delta\lambda$ до величины $O(h^N)$. Таким образом, если точка $E^k$ - простая и интервал $E^k \pm O(h^N)$ не содержит точек спектра, то получается асимптотика собственной функции $\psi_k$ оператора $\hat{H}$.

Рассмотрим уравнение Паули

$$\hat{H}_n \psi = \left\{(-ih\nabla + A(x))^2 - \Phi_0(x) - ieh(\bar{q}_2, \bar{H}(x))\right\}\psi = E\psi \quad (5.8)$$

Пусть $\Gamma(E)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы при

$$H(x,p) = \left[p + A(x)\right]^2 - \Phi_0(x) \qquad (5.9)$$

Оператор вида

$$R = i\frac{d}{dt} + ie(\bar{\sigma}_2, \bar{H}) \qquad (5.10)$$

самосопряжен в пространстве функций в интегрируемым квадратом на $\Gamma(E)$ по инвариантной мере $\sigma(\alpha)$. Предположим, что $\mu(E)$ - его собственное значение, а $\mathcal{X}(\alpha)$ - соответствующая ему собственная функция. (Заметим, что в случае, когда $R = i\frac{d}{dt}$ (например, для уравнения Шредингера), то можно положить, в частности, $\mu = 0$, $\mathcal{X}(\alpha) \equiv 1$.)

Теорема 3.6а.

При высказанных предположениях выполняется теорема 3.6 если положить в (5.5) $H(p,q) = (p + A(q))^2 - \Phi_0(q)$

и заменить оператор Гамильтона оператором

$$\hat{H}_h = [-ih\nabla + A(x)]^2 - \Phi_0(x) - ihe(\bar{\sigma}, \bar{H}(x)).$$

Мы видим, что для уравнения Паули к обычному оператору сдвига вдоль динамической системы добавляется матрица, характеризующая изменение спиновой поляризации вдоль траектории. Таким образом, спин в классической механике существует, но не сказывается на классической траектории. Однако, при наличии спина необходимо изучать спектральные свойства не оператора сдвига вдоль траектории, а оператора (5.10) поскольку собственные функции и собственные значения оператора $R$ отвечают задаче о классической частице, обладающей спином.

---

x/ О существовании классического предела у спиновой поляризации см. /19/; /68/; /58/; /66/. В настоящей работе дано строгое доказательство этого факта, получена связь с оператором сдвига динамической системы и изучено поведение спина как вблизи фокусов, так и вдали от них.

## ГЛАВА 4. УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

### §1. Уравнения в счетно-нормированных пространствах и задача многих тел в квантовой механике.

Мы остановимся на наиболее общей и наиболее актуальной с точки зрения квантовой физики и химии задаче, когда в линейном уравнении с частными производными малый параметр стоит лишь при производных по некоторым выделенным переменным. Этому случаю отвечает задача, связанная с взаимодействием тяжелых и легких частиц, которая, например, имеет место в квантовой теории молекул или в теории столкновений.

Таким образом, наш дифференциальный оператор будет зависеть от двух систем переменных. Пусть переменные, при производных по которым стоит малый параметр (например, описывающая систему тяжелых частиц), имеет размерность $n$ .

Относительно зависимости оператора от остальных переменных (число которых в частности может быть и равно нулю) и производных по ним, нам понадобятся лишь настолько общие сведения, что мы можем для простоты записи написать дифференциальное уравнение от $n$ выделенных переменных с операторными коэффициентами, зависящими от этих переменных как от параметров.

Например, уравнение

$$-\frac{h^2}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{h^2}{2m_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+V(x_1,x_2)\psi=\lambda\psi, \qquad (1.1)$$

где $m_1 \gg m_2$ , мы представим в виде

$$-\frac{h^2}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+A(x_1)\psi=\lambda\psi ,$$

где $A(x_1)$ - оператор

$$A(x_1) = -\frac{h^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2),$$

зависящий от $x_1$ как от параметра.

Оператор $A(x_1)$ - неограничен. В случае, и если $v(x_1, x_2) \in C^\infty$, мы можем сказать, что он переводит пространство $W_2^k[R^1]$ функций от $x_2$ в $W_2^{k-2}[R^1]$. Таким образом, если рассмотреть счетно-нормированное пространство $W_2^\infty[R^1]$, то, очевидно, что оператор $A(x_1)$ переводит это пространство в себя.

Функция $\psi(x_1, x_2)$ может быть рассмотрена как функция $x_1$ со значениями в пространстве $W_2^\infty[R^1]$ функций от $x_2$.

В общем случае мы не будем конкретизировать счетно-нормированного пространства, в котором действуют операторные коэффициенты, но во всех приложениях это пространство есть пространство векторов, нормы которых принадлежат $W_2^\infty[R^s]$, где $S$ - некоторое целое число.

Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу:

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left[h^2\frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - v(x_1, x_2)\right]\psi = \mathcal{F}(x_1, x_2, t, h) \quad (1.2)$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2, h)$$

Предположим, что все заданные функции принадлежат $C^\infty$ по всем аргументам, а выражения

$$\max_{\substack{0\le t\le t_0\\ 0\le h\le 1}}\left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^j}{\partial x_i^j}\mathcal{F}(x_1,x_2,t,h)\right|^2 dx_1\,dx_2\right)^{1/2} \quad (1.3)$$

и

$$\max_{0\le h\le 1}\left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{2}\int\left|\frac{\partial^j}{\partial x_i^j}\psi_0(x_1,x_2,h)\right|^2 dx_1\,dx_2\right)^{1/2} \quad (1.4)$$

ограничены при $k=1,2,\dots$

Это означает, что $\mathcal{F}(x_1,x_2,t,h)$, как функция аргументов $x_1$ и $x_2$, принадлежит $W_2^{\infty}[R^2]$ и непрерывна по $t$ и $h$. Пространство функций со счетным числом норм вида $(1.3)$ или вида $(1.4)$ мы будем обозначать соответственно $W_2^{\infty}[R^2, C_2]$ и $W_2^{\infty}[R^2, C_1]$.

Мы убедимся, (см. п 5) что решение $\psi(x_1,x_2,t,h)$ задачи $(1.2)$ удовлетворяет условию

$$h\psi(x_1,x_2,t,h)\in W_2^{\infty}[R^2, C_2]$$

Иначе говоря, найдется такое $N$, что, если

$$\mathcal{F}(x_1,x_2,t,h)\in W_2^{N}[R^2, C_2] \quad и \quad \psi_0(x_1,x_2,h)\in W_2^{N}[R^2, C_1],$$

то

$$h\psi(x_1,x_2,t,h)\in W_2^{m(N)}[R^2, C_2],$$

причём

$$\lim_{N\to\infty} m(N)=\infty$$

Мы здесь не выделяли переменных $t$ и $x_1$, при производных по которым стоит малый параметр $h$. Однако, мы можем рассматривать пространство $W_2^{N}[R^2, C_2]$ как пространство $W_2^{N}[R^1, C_2]$ функций от $x_1, t, h$ со значениями в пространстве $W_2^{N}[R^1]$ функций от $x_2$.

Таким образом, $W_2^N[R^2, C_2] \supseteq W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}$

Действительно,

$$\|\mathcal{F}(x_1, x_2, t, h)\|_{W_2^N\{R^1, C_2; W_2^N[R^1]\}} =$$

$$= \operatorname*{Max}_{\substack{0 \le t \le t_0 \\ 0 \le h \le 1}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \mathcal{F}(x_1, x_2, t, h) \right\|^2_{W_N^2[R^1]} dx_1} \qquad (1.5)$$

Пусть $\{B^N\}$ - некоторая последовательность банаховых пространств:

$$B^{N+1} \subset B^N, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

определяющая счетно-нормированное пространство $B^\infty$.

В общем случае мы будем рассматривать пространство функций от $x_1, \ldots, x_n, t, h$, принадлежащих $W_2^\infty[R^n, C_2]$ со значениями в некотором абстрактном счетно-нормированном пространстве $B^\infty$. Это пространство функций, которое мы обозначим через

$$W_2^\infty[R^n, C_2, B^\infty]$$

со счетным числом норм вида

$$\operatorname*{Max}_{\substack{0 \le t \le t_0 \\ 0 \le h \le 1}} \Bigl( \sum_{\substack{i \le n+1 \\ k \le N}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n, t, h) \right\|^2_{B^N} dx \Bigr)^{1/2} \qquad dx = dx_1 \ldots dx_n, \quad x_{n+1} = t. \qquad (1.6)$$

Аналогично через $C^\infty[R^{n+1}, C_1, B^\infty]$ мы обозначим пространство со счетным числом норм вида

$$\operatorname*{Max}_{\substack{0 \le t \le t_0, |x| \le \infty \\ 0 \le h \le 1}} \sum_{\substack{i \le n+1 \\ k \le N}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \mathcal{F}(x,t,h) \right\|_{B^N} \qquad x_{n+1} = t \tag{1.7}$$

Пусть на многообразии $\Gamma$ задан некоторый набор базисных векторов $X_\nu(\alpha)$, $\nu = 1, \dots, r$, принадлежащих некоторому счетно-нормированному пространству $B^\infty$ и бесконечно дифференцируемых по параметру $\alpha$, в том смысле, что производные этих векторов по $\alpha$ вновь принадлежат $B^\infty$.

Канонический оператор $K^{\gamma,\alpha}_{1/h,\Gamma,h}$ переводящий функцию вида

$$\sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha) X_\nu(\alpha)$$

со значениями в $B^\infty$ в некоторую функцию $x_1, \dots, x_n$ со значениями в $B^\infty$, определяется обычным образом.

Напомним, что $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha) I$,

где $I$ - единичная матрица в этом подпространстве. Функции $\{e^i(\alpha)\}$ являются разложением единицы по каноническому атласу $\mathcal{H}$.

§ 2. Асимптотика решения задачи Коши уравнений с операторными коэффициентами.

Мы будем изучать асимптотику решения уравнения (3.7) гл. 1. Рассмотрим в счетно-нормированном пространстве $B^\infty$, являющемся пересечением банаховых пространств $B^1, B^2, \dots, B^N$ таких, что $B^{i+1} \subseteq B^i$, оператор

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, x_1, \dots, x_n, t, h),$$

зависящий от $2n+3$ параметров и отображающий $B^\infty$ в себя. Мы предположим, что оператор $\mathcal{L}$ бесконечно дифференцируем по всем этим параметрам в области $p \in \Omega_p$, $x \in \Omega_x$, $0 \leq t \leq T$ и что все его частные производные отображают $B^\infty$ в себя.

1) Предположим, что $B^1$ – гильбертово пространство

Мы предположим, что существует собственное значение $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ операторов $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ и $\mathcal{L}^*_0 = \mathcal{L}^*(p, p_{n+1}, x, t, 0)$, зависящее от параметров $p, p_{n+1}, x, t$. Пусть кратность этого собственного значения одинакова для $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^*$, не зависит от параметров и либо конечна, либо $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_0^* \equiv \lambda(p, p_{n+1}, x, t)$

Пусть собственные функции операторов $\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ и $\mathcal{L}^*(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ соответственно

$$\chi_1(p, p_{n+1}, x, t),\ \chi_2(p, p_{n+1}, x, t), \dots, \chi_r(p, p_{n+1}, x, t) \text{ и } \chi_1^+, \dots, \chi_r^+$$

отвечающие $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$, принадлежат $B^\infty$ и

$$\det \| \chi_i^+ \chi_j \| \neq 0.$$

Из последнего неравенства следует, что можно выбрать $\chi_i^+$, $i = 1, \dots, r$ таким образом, что $(\chi_i^+, \chi_j) = \delta_{ij}$.

Обозначим через $R_\lambda$ проекционный оператор на собственное подпространство оператора $\mathcal{L}_0$, отвечающее $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$, а через $R_\lambda^+$ – проекционный оператор на подпространство, натянутое на векторы $\chi_1^+, \chi_2^+, \dots, \chi_r^+$.

Предположим, что оператор

$$T=\{[\mathcal{L}(p,p_{n+1},x,t,0)-\lambda(p,p_{n+1},x,t)][1-P_\lambda]^{-1}[1-P_\lambda^+]$$

существует в $B^\infty$ и определен всюду в $B^\infty$, а

$$\mathcal{L}(p,p_{n+1},x,t,h)=\sum_{k=0}^{m}\Lambda_k(p,x,t,h)p_{n+1}^k$$

Положим

$$\hat{\mathcal{L}}\psi=\hat{\mathcal{L}}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},-ih\frac{\partial}{\partial t},x_1,\dots,x_n,t,h\right)\psi= \tag{2.1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\Lambda_k\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},x_1,\dots,x_n,t,h\right)\left(-ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\psi=0$$

где

$$\Lambda_k\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},x_1,\dots,x_n,t,h\right)\psi=\Lambda_k(\hat{p},x,t,h)\psi=$$

$$=(2\pi h)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ipx}{h}}dp\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_k(p,x,t,h)e^{-\frac{ip\xi}{h}}\psi(\xi,t)d\xi \tag{2.2}$$

2) Мы предположим, что решение задачи

$$\hat{\mathcal{L}}\psi=h^{\tau}\mathcal{F}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\psi\Big|_{t=0}=h^{s_k}\psi_0 \qquad k=0,\dots,m-1 \tag{2.3}$$

где $\tau$ и $s_k$, $k=0,\dots,m-I$, - некоторые фиксированные числа, а $\mathcal{F}=\mathcal{F}(x,t,h)$ и $\psi_0=\psi_0(x,h)$ - произвольные бесконечно дифференцируемые функции $x$ и непрерывные функции $h$ и $t$ со значениями в $B^\infty$, существует и единственно в классе таких же функций x/.

---

x/ Этот класс функций $\mathcal{F}(x,t,h)$ есть пространство со счетным числом норм вида $\max\limits_{\substack{x,0\le t\le T\\0\le h\le 1}}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\mathcal{F}(x,t,h)\right\|_{B^k}$ $k=1,2,\dots$

Наконец, предположим, что характеристический в (смысле § 3, гл. I) полином $\lambda(p, p_{n+1}, x, t) = 0$ имеет действительный корень $p_{n+1} = H(p, x, t)$ постоянной кратности и следовательно $\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}} \neq 0$.

Пусть $Q(\alpha, t)$, $P(\alpha, t)$, $0 \le t \le T$ - решения уравнений *)

$$\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial P_i}\,; \qquad \frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \qquad i = 1, \dots, n \qquad (2.4)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$Q\big|_{t=0} = q^0(\alpha), \quad P\big|_{t=0} = p^0(\alpha), \qquad (2.5)$$

принадлежат $C^\infty$ и лежат соответственно в областях $\Omega_x$ и $\Omega_p$.

Заметим, что из этих условий практически в конкретных квантовомеханических задачах нужно проверять лишь условие постоянной кратности и изолированности точки $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$.

Из остальных условий нетривиальными для дифференциальных операторов являются а) принадлежность собственных функций $\chi_i, \chi_i^+$, пространству $B^\infty$, в) существование решения $\chi \in B^\infty$ уравнения

$$[\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0) - \lambda]\, \chi = \mathcal{F},$$

где

$$\mathcal{F} \in B^\infty.$$

---

*) О существовании таких решений для любого $T$ см лемму 1 дополнения.

c) Существование и единственность решения уравнения (2.3)
Эти условия проверяются для уравнений квантовой механики с помощью энергетических неравенств.

При этих предположениях справедлива следующая

Теорема 4.I.

Пусть $\Gamma_0 = \{ q^\circ(\alpha), p^\circ(\alpha) \}$ - лагранжево многообразие, $\alpha^0$ - его начальная точка.

Для каждой финитной бесконечно дифференцируемой по $\alpha$ и ограниченной при $0 \le h \le 1$ вместе со всеми производными вектор-функции

$$\varphi_0(\alpha, h) = \{ \varphi_{01}(\alpha, h), \ldots, \varphi_{0z}(\alpha, h) \}$$

существует решение уравнения

$$\hat{\mathcal{L}} \psi = 0, \qquad (2.6)$$

представимое в виде

$$\psi = K^{\gamma, \alpha_t^0}_{1/h, \Gamma_t, h} \sum_{\nu=1}^{z} \varphi_\nu(\alpha, t, h) \, \chi_\nu [P(\alpha,t), (\alpha,t), t], \qquad (2.7)$$

где $\Gamma_t = \{ Q(\alpha, t), P(\alpha, t) \}$, $\alpha_t^0$ - начальная точка на многообразии $\Gamma_t$,

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \, \mathrm{Ind} \, \ell[\alpha^0, \alpha_t^0] + \frac{1}{h} \int\limits_{\ell[\alpha^0, \alpha_t^0]} \Bigl(-H dt + \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i \Bigr), \qquad (2.8)$$

а $\varphi = \{ \varphi_1(\alpha, t, h), \varphi_2(\alpha, t, h), \ldots, \varphi_z(\alpha, t, h) \}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}}}\,\varphi\right)}{dt}=\Big\|-\left(\chi_\nu^+,\frac{d\chi_\mu}{dt}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}}-\sum_{i=1}^{n+1}\left(\chi_\nu^+,\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\right)\frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_i}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\lambda}{\partial p_i\,\partial x_i}\left(\chi_\nu^+,\chi_\mu\right)-i\left(\chi_\nu^+,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h}\chi_\mu\right)_{h=0}\Big\|\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1/2}\varphi,$$

где $x_{n+1}=t,\quad p=P(\alpha,t),\quad x=X(\alpha,t),$ (2.9)

и начальному условию $\varphi|_{t=0}=\varphi_0(\alpha,h).$

В случае, когда $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}_0^*=\lambda(p,p_{n+1},x,t)$, в предположении, что $exp\{i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h}|_{h=0}\}$ отображает $B^\infty$ в себя, $\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}}}\;\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}}}\;\varphi=\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial p_j\,\partial x_j}-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h}\Big|_{h=0}\right]\varphi$$

Напомним, что равенство (2.7) справедливо с точностью до функций, бесконечно дифференцируемых по $x$ и $t$ и вместе со всеми своими производными имеющих порядок $O(h^\infty)$

Укажем на следующее важное обобщение теоремы (4.I)

Пусть $A$ - замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)\subset B^i$ $i=1,2,\ldots$

Пусть $(1+\varepsilon A)^{-1}$ существует и определен всюду в $B^i$ $i=1,2,\ldots$, причем

$$\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|_{B^i}\leqslant 1 \qquad i=1,2,\ldots$$

при всех $\varepsilon>0$ и при всех $\varepsilon$ чисто мнимых, и пусть $A^{-1}$ существует.

Заменим формально в операторе $\hat{\mathcal{L}}$ параметр $1/h$ на оператор $A$.

Теорема 4.2

В предположениях теоремы 4.I существует x/ решение уравнения $\hat{\mathcal{L}}\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right)\psi = 0$ представимое в виде

$$\psi = K^{\gamma, \alpha_t^0}_{A, \Gamma_t, (1+\varepsilon A)^{-1}} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t) X_\nu \left[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t\right] \quad (2.10)$$

где

$$\gamma, \alpha_t^0, \Gamma_t, X_\nu, P(\alpha, t), Q(\alpha, t)$$

определены в предыдущей теореме, а $\varphi_\nu(\alpha, t)$ удовлетворяет уравнению (2.9) и начальному условию $\varphi_\nu(\alpha, 0) = \varphi_\nu^0(\alpha)$, где $\varphi_\nu^0(\alpha)$, $\nu = 1, .., r$, – произвольные финитные бесконечно дифференцируемые функции. Из этой теоремы следуют все предыдущие результаты относительно асимптотики задачи Коши.

Положим в теореме 4.I $m = 1$, $\Lambda_1 \equiv 1$,

а $\Lambda_0(p, x, t, h) = \mathcal{L}(p, x, t, h)$. Пусть $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(p, x, t, 0)$ – самосопряжен в $B^1$.

Мы придем к следствию:

Теорема 4.Ia.

В предположениях теоремы 4.I решение задачи

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{L}(\hat{p}, x, t, h)\psi \quad (2.11)$$

---

x/ Заметим, что в этом случае в (2.3) надо заменить $h$ на $1/A$, а $\mathcal{F}$ и $\psi_0$, очевидно, не зависят от $h$ и принадлежат пространству функций со счетным числом норм $\max\limits_{x, 0 \le t \le T} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \mathcal{F}(x, t) \right\|_{B^k}$ $k = 1, 2, \ldots$

$$\psi\Big|_{t=0} = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu^0(\alpha,h) X_\nu(p^0(\alpha), q^0(\alpha), 0), \qquad (2.11a)$$

где
$$\varphi_\nu^0(\alpha,h) \in C^\infty[C^1],$$

может быть представлено в виде

$$\psi = K^{\gamma,\alpha_t^0}_{1/h,\Gamma_t,h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha,t,h) X_\nu(P(\alpha,t), Q(\alpha,t), t), \qquad (2.12)$$

где
$$\alpha_t^0,\ \Gamma_t,\ P(\alpha,t),\ Q(\alpha,t)$$

определены ранее, а

$$\varphi(\alpha,t,h) = \{\varphi_1(\alpha,t,h), \ldots, \varphi_r(\alpha,t,h)\}$$

удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Big\| -\Big(X_\nu, \frac{dX_\mu}{dt}\Big) - \sum_{i=1}^{n} \Big(X_\nu, \Big(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big) \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \delta_{\mu\nu} - i\Big(X_\nu, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} X_\mu\Big)_{h=0} \Big\|_{\substack{p=P(\alpha,t)\\ x=Q(\alpha,t)}} \varphi \qquad (2.13)$$

и начальному условию

$$\varphi_\nu(\alpha,t,h)\Big|_{t=0} = \varphi_\nu^0(\alpha,h) \qquad \nu = 1,\ldots,r$$

Из общей теоремы могут быть без труда получены асимптотические формулы (в целом) для решения гиперболических систем с осциллирующими или разрывными начальными данными.

В качестве примера рассмотрим слабо связанные гиперболические системы. Теорема 3.4 и все примеры гл.I также следуют из теоремы 4.2.

## § 3. Гиперболическая система.

Рассмотрим слабо-связанную гиперболическую по Петровскому систему вида

$$Lu = \frac{\partial^s u}{\partial t^s} + \sum_{k_1+\ldots+k_n\le s} a_{k_1+\ldots+k_{n+1}}(x,t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_{n+1}}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}} = 0 \qquad (3.1)$$

$K_{n+1} \neq S$

$u = (u_1, \dots, u_r)$,

где $a_{K_1 \dots K_{n+1}}(x,t)$ при $K_1 + \dots + K_{n+1} < S$ — матрицы порядка $r$. Введем следующие обозначения: через

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right)$$

обозначим главную часть оператора $L$:

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{\substack{K_1 + \dots + K_{n+1} = S \\ K_{n+1} \neq S}} a_{K_1 \dots K_{n+1}} \frac{\partial^S}{\partial x_1^{K_1} \dots \partial x_n^{K_n} \partial t^{K_{n+1}}} + \frac{\partial^S}{\partial t^S}, \tag{3.2}$$

а через

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right)$$

обозначим матричный оператор вида

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{K_1 + \dots + K_{n+1} = S-1} a_{K_1} \dots a_{K_{n+1}}(x,t) \frac{\partial^{S-1}}{\partial x_1^{K_1} \dots \partial x_n^{K_n} \partial t^{K_{n+1}}} \tag{3.3}$$

Мы предполагаем, что

1) корни $H = H^{\nu}(x, \rho, t)$ многочлена $\Lambda(\rho, H, x, t) = 0$ относительно $H$ действительны и различны;

2) Многочлен по $\rho$

$$\Lambda(\rho, 0, x, t)$$

неотрицателен, причем, если $|\rho| \geq \delta > 0$, то $\Lambda(\rho, 0, x, t) \geq \varepsilon > 0$

3) Коэффициенты уравнения принадлежат $C^{\infty}$.

Характеристическое уравнение для (3.I) имеет вид

$$\Lambda\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right) = 0 \qquad (3.4)$$

Корням

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = H^\nu\left(x, \frac{\partial S^\nu}{\partial x}, t\right) \qquad \nu = 1, \dots, s \quad (3.5)$$

этого уравнения отвечают $s$ бихарактеристик, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона вида $(1.2)$ гл. 1 при $\nu = 1, \dots, s$

Теорема 4.3.

Пусть $A$ – произвольный самосопряженный оператор гильбертова пространства $H$, $\varphi(\alpha)$ – произвольная финитная бесконечно дифференцируемая вектор-функция на многообразии $\Gamma$ со значениями в $H$. При высказанных предположениях относительно гиперболического уравнения $(3.1)$ существуют такие его решения $u(x,t)$ – вектор-функции со значениями в $H$, которые могут быть представлены в виде

$$u(x,t) = K^{\gamma^\nu, \alpha_t^0}_{A, \Gamma_t, R_t} \left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu}\right]^{1/2}_{t=0} \left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu}\right]^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu}\right]^{-1} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_i^\nu \partial q_i^\nu} + \frac{\partial^2 \Lambda[p^\nu, H^\nu, q^\nu, t]}{\partial H^\nu \partial t} - 2B(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)\Big] dt\right\} \cdot$$

$$\cdot \varphi(\alpha) \qquad (3.6)$$

где

$$\gamma^\nu = \frac{-\pi}{2} \operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \alpha_t^0] + \frac{1}{h} \int_{\ell[\alpha^0, \alpha_t^0]} \left(-H^\nu dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i\right),$$

$$p^\nu = P^\nu(\alpha, t), \quad q^\nu = Q^\nu(\alpha, t),$$

$$H^\nu = H^\nu[Q^\nu(\alpha,t), P^\nu(\alpha,t), t],$$

$\alpha_t^0$ - начальная точка атласа $\mathcal{H}_t$, $\ell[\alpha^0;\alpha_t^0]$ - путь, соединяющий точки $\alpha^0$ и $\alpha_t^0$ и принадлежащей пленке $R_t$.

Этот запас решений достаточно велик, и их линейная комбинация отвечает решению рассматриваемого уравнения (3.1) удовлетворяющему произвольным начальным условиям вида

$$\frac{\partial^{i-1} u}{\partial t^{i-1}} = K^{0,\alpha^0}_{A,\Gamma^i,R_2}\ \varphi_i(\alpha), \qquad i=1,\dots,S,$$

где $\Gamma^i$, $i=1,\dots,S$ - произвольные лагранжевые подмногообразия, $\varphi_i(\alpha)$ - произвольные финитные бесконечно дифференцируемые вектор-функции на $\Gamma^i$ со значениями в пространстве $H$. Сюда в частности включаются случаи осциллирующих и разрывных начальных условий, рассматриваемых в книге Куранта [38]. Это вытекает из следующего замечания.

Как и ранее, на обе части равенства в теореме 4.3 можно подействовать оператором $A^N$. При этом мы получим в правой и левой частях равенства обобщенные в смысле пункта 2° § 1 главы I функции. Функция $A^N u(x,t)$ будет являться обобщенным решением рассматриваемого уравнения. Поэтому, если $A=i\frac{\partial}{\partial\tau}$, а $H$ - пространство $L_2[R^1]$ функций от $\tau$, то мы можем положить $\varphi(\alpha)=g(\tau)\,f(\alpha)$, где $g(\tau)$ - обобщенная функция, равная $N$-ой производной от непрерывной функции, а $f(\alpha)$ финитная функция со значениями на прямой.

В случае осциллирующих начальных условий надо положить $H=L_2[R^1]$ - пространству функций от $\omega$ на

отрезке $[1, \infty]$, $A = \omega$ - оператору умножения на $\omega$, $\varphi(\alpha) = g\, f(\alpha)$, $g = \frac{1}{\omega} \in L_2[R^1]$.

Тогда $Ag = 1$, $Au(x,t)$ есть функция, зависящая от параметра $\omega$, а

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma_t,R_t} = K^{\gamma,\alpha^0}_{\omega,\Gamma_t,1/\omega}$$

## § 4. Асимптотика собственных значений уравнения с операторными коэффициентами.

Рассмотрим пространство $B^\infty$, где $B^1$ - гильбертово.

Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = L\left(x_1, \ldots, x_n, -ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, h\right),$$

введенный в § 2. При этом дополнительно мы полагаем, что этот оператор не зависит от $t$. Предположим, что этот оператор самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2[B^1] = W_2^0[R^n; B^1]$ функций от $x_1, \ldots, x_n$ со значениями в $B^1$ и что условия 1), наложенные на этот оператор в § 2, выполнены. Сверх того, мы предположим, что спектр оператора $\hat{L}$ не является предельным при $\lambda = E^0$

Предположим, что существует семейство компактных замкнутых лагранжевых многообразий $\Gamma(E)$ без края при $E \in \varepsilon = (E^0-\varepsilon, E^0+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ такое, что

1) $\Gamma(E)$ непрерывно зависит от $E$;

2) $H(p(\alpha), q(\alpha)) = E$ при $\alpha \in \Gamma(E)$ $(H(p,q)$ – гамильтониан оператора $L)$. 3) $\mathcal{U}_{0,t}\,\Gamma(E) = \Gamma_t(E) = \Gamma(E)$
В качестве меры $\sigma(\alpha)$ на многообразии $\Gamma(E)$ мы возьмем меру инвариантную относительно сдвигов вдоль траекторий гамильтоновой системы. В пространстве функций с интегрируемым квадратом на $\Gamma$ по этой мере оператор[x)]

$$R = i\frac{d}{dt} + i\left\|\left(\mathcal{X}^{\nu}, \frac{d\mathcal{X}^{\mu}}{dt}\right) + \left(\mathcal{X}^{\nu}, \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L^{0}}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right]\frac{\partial \mathcal{X}^{\mu}}{\partial p_i}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i}\,\delta_{\mu\nu} - i\left(\mathcal{X}^{\nu}, \frac{\partial L}{\partial h}\Big|_{h=0}\mathcal{X}^{\mu}\right)\right\|_{\substack{p = P(\alpha,t) \\ x = Q(\alpha,t)}}$$

на многообразии $\Gamma(E)$ самосопряжен. Предположим, что $\mu(E)$ – его собственное значение, а $\xi(\alpha)$ – соответствующая ему собственная функция.

Теорема 4.4

Пусть $\{E^{i}\} \subset \mathcal{E}$ $i = 1,\dots,i_0$ зависящее от $h$ множество из $\mathcal{E}$ такое, что на $\Gamma(E^{i})$ удовлетворяется система уравнений

$$\frac{2}{\pi h}\oint_{K} p(\alpha)\,dq(\alpha) = \ell_{K} \pmod 4, \quad 1 \le K \le K_0 \qquad (4.1)$$

---

x/ Напомним, что скалярные произведения здесь берутся в $B^{1}$.

где $\oint\limits_{k}$ обозначает интеграл по $k$ - тому базисному циклу многообразия $\Gamma(E^i)$, $\ell_k$ - индекс этого базисного цикла, $k_0$ - одномерное число Бетти многообразия $\Gamma(E^i)$. Тогда существует подпоследовательность $\lambda^i$ собственных значений оператора $\hat{L}$, такая, что

$$\lambda^i = E^i - h\mu(E^i) + O(h^2), \tag{4.2}$$

а спектральная функция $E_{\Delta\lambda}$ интервала

$$\Delta\lambda = \{\lambda^i - o(h),\ \lambda^i + o(h)\}$$

оператора $\hat{L}$ удовлетворяет соотношению

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}]\, K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^i),h} \sum_{\nu=1}^{z} \xi_\nu(\alpha)\, \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[R^n, B^1]} = O(h) \tag{4.3}$$

Заметим, что в случае, когда $z = 1$, а $\chi(x,p)$ - действительна, матрица $G = 0$, и задача сводится к отысканию собственных функций и собственных значений оператора сдвига вдоль гамильтоновой системы (или оператора $i\frac{d}{dt}$) на многообразии $\Gamma$. Эта задача широко изучена[x/]. Кроме того, мы можем взять в этом случае $\mu = 0$, $\xi(\alpha) = 1$.

В качестве примера рассмотрим оператор Гамильтона вида

$$H = -\frac{h^2}{2M}\Delta_1 - \frac{h^2}{2M}\Delta_2 + \frac{e}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|), \tag{4.4}$$

где

$$\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\Delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^2, \quad i = 1, 2,$$

$e$ - заряд, а $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ — оператор Гамильтона общего вида для системы $N$ электронов в поле двух неподвижных протонов (см. напр. [87]).

---

x/ В противном случае см. [3]

Оператор Гамильтона $\hat{H}$ отвечает двухатомной молекуле.

Пусть $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ - некоторое собственное значение оператора $\hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2)$ (так называемый электронный терм). Мы предположим, что функция

$$u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)=\frac{e}{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|}+E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$$

имеет минимум (т.е. терм $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ - устойчивый (см. напр. [47] ). Для простоты будем полагать, как это обычно имеет место, что этот минимум единственен. (Это условие не существенно).

Будем искать асимптотику собственных значений оператора $\hat{H}$, расположенных вблизи точки $\lambda^{\circ}$, лежащей между минимумом и абсолютным максимумом функции $u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ В этом промежутке спектр $\hat{H}$ дискретен (см. [ 23 ])

Мы предположим, что кратность собственного значения $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ остается постоянной в области $\Omega\ni|\bar{r}_1-\bar{r}_2|$, для которой $u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)\leq\lambda^{\circ}$, т.е. что в этой области терм $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ не пересекается ни с каким другим. Пусть эта кратность равна I. Нетрудно доказать, что при этих ограничениях оператор $\hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ удовлетворяет условиям I), если в качестве $B^{\sim}$ взять $W_2^{\sim}[R^{3N}]$, а оператор $\hat{H}$ - условиям теоремы 4.4.

Обозначим через $a$ линейные размеры молекулы.

Перейдем в (4.4) к безразмерным переменным Положим $\rho_1=\frac{r_1}{a}$, $\rho_2=\frac{r_2}{a}$ и разделим (4.4) на $V_0=\underset{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|\in\Omega}{\min}E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$.

Мы получим оператор

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\nu^2}{2}\Delta_1 - \frac{\nu^2}{2}\Delta_2 + \frac{\alpha_1}{|\bar\rho_1-\bar\rho_2|} + \hat{\mathcal{H}}_N[|\bar\rho_1-\bar\rho_2|,\alpha_1,\alpha_2],$$

где

$$\nu = \frac{h}{a\sqrt{MV_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{e}{aV_0}, \quad \alpha_2 = \frac{h}{a\sqrt{mV_0}}$$

( $m$ - масса электрона). Здесь $\sum_{i=1} \frac{\partial}{\partial\rho^2_{\sigma_i}}$ $\sigma=1,2$ снова обозначена через $\Delta_\sigma$.

Поскольку для реальных молекул $\nu\sim 10^{-3}$ - $10^{-4}$, а $\alpha_1$ и $\alpha_2\sim 1$, можно рассматривать $\nu$ как малый параметр, и искать асимптотику уравнения

$$\hat{\mathcal{H}}\psi_n = \lambda_n\psi_n$$

при $\nu\to 0$. Гамильтониан оператора $\hat{\mathcal{H}}$ имеет вид

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\alpha_1}{\rho_1-\rho_2} + \frac{E(a(\rho_1-\rho_2))}{V_0}$$

Ему отвечает следующее уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\left\{\frac{1}{2}(\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_2 S)^2\right\} + \frac{\alpha_1}{|\bar\rho_1-\bar\rho_2|} + \frac{E[|\bar r_1-\bar r_2|]}{V_0} = \lambda^0 \quad (4.5)$$

Введем новые переменные

$$\bar r = \bar\rho_1-\bar\rho_2, \quad R = \bar\rho_1+\bar\rho_2$$

Мы получим, обозначая через $\nabla_{\bar R}$ и $\Delta_{\bar r}$ операторы $\nabla$ по переменным $\bar R$ и $\bar r$, соответственно,

$$\frac{1}{2}\left\{(\nabla_{\bar R} S)^2 + (\nabla_{\bar r} S)^2\right\} + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{E(ar)}{V_0} = \lambda^0$$

Таким образом, переменные по $\bar r$ и $\bar R$ разделяются и,

полагая $S = S(r)$, получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(ar)}{V_0} = 2\lambda^0$$

Нетрудно убедиться, что условия (4.I) в данном случае будут иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2\left[\lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0}\right] - \alpha_\theta^2}\,; \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}$$

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi = 2\pi m$$

$$J_\theta = \oint\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\varphi) = \pi(2\ell+1)$$

$$J_r = 2\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2\left[\lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0}\right] - \frac{(J_\theta + J_\varphi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr = \pi(2n+1)$$

где $r_1$ и $r_2$ – нули подкоренного выражения.

Таким образом,

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + O(\nu^2)\,,$$

где $\lambda_k^0$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2\lambda_k^0 - \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(ar)}{V_0} - \frac{(\ell+\frac{1}{2})^2\nu^2}{r^2}}\, dr = \pi\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\nu$$

Заметим, что известный метод Борна-Опенгеймера (адиабатический метод) может быть применен к решению поставленной задачи лишь при дополнительном условии : $\lambda' \sim 1$ (см. [87] )

## ГЛАВА 5

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МАЛОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОГО ТИПА

Асимптотика в малом, т.е. при достаточно малом $t$, для решения системы уравнений гиперболического типа с разрывными и быстро осциллирующими начальными условиями была доказана в математической литературе (см.напр. [26],[(6,I)][46,1), 2)] [40] ,[38] , [50] , [2] , [5].)

Формально квазиклассическое разложение в малом для уравнений квантовой механики, совершенно аналогичное асимптотическому разложению вышеуказанных задач, было выписано в физической литературе [24], [27](см. также [8],[51, I)],[26])

Настоящая глава посвящена доказательству этих формул, которое основывается с одной стороны на теореме 3.2 теории возмущений, с другой стороны на оценке обратного оператора в том или ином пространстве x/.

---

x/ Заманчиво было бы [ см. [29]], заменив $\frac{1}{h}$ на $i\frac{\partial}{\partial S}$ (переход к "пятиоптике" см. /67/ ,/63/ ), свести задачу о квазиклассической асимптотике к задаче, рассмотренной Людвигом /50 / об асимптотике гиперболических систем с осциллирующими начальными данными. Нетрудно убедиться, однако, что полученная таким способом задача отнюдь не удовлетворяет условиям теорем Людвига и Лакса.

Математическое обоснование этих формул грубо говоря, может быть проведено следующим образом. I) Доказывается, что подстановка этих априори взятых асимптотических формул в уравнение дает выражение порядка $O(\frac{1}{\omega^{N}})$ ( т.н."невязка"). 2) Оценивается обратный оператор, Отсюда получится оценка разности между точным решением и данной асимптотической формулой. Заметим, что в фокальных точках и сами асимптотические формулы и невязка обращаются в бесконечность. Для уравнений туннельного типа такая схема, однако, не годится. Мы здесь приведем несколько измененную схему доказательства, которая будет в дальнейшем нами перенесена и на уравнения туннельного типа. Кроме того, приведенные нами доказательства дают возможность опираться на теоремы 3.2 и 3.6 абстрактной теории возмущений. Это с одной стороны упрощает доказательство, с другой стороны снижает требования на гладкость коэффициентов уравнения.

---

( продолжение сноски с предыдущей стр-цы).

Более того, задача о квазиклассической асимптотике сводится, таким образом, для уравнения Шредингера, например, к весьма сложной задаче с начальными данными, лежащими на характеристике. Эта задача не охватывается даже теорией "униформизации" Лере [26]. Для релятивистского случая плоскость $t=0$ может не быть даже (при некоторых соотношениях коэффициентом) пространственно подобной. Эти дополнительные затруднения связаны с тем, что точка $\lambda=0$ является точкой спектра для оператора $i\frac{\partial}{\partial S}$, в то время как $\frac{1}{h}\neq 0$.

## § I. Асимптотика решения уравнения Шредингера в малом I°. Квазиклассическое представление

Вначале построим характеристическое (квазиклассическое) представление для уравнения Шредингера

$$i h \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x)\psi \qquad x=(x_1, \ldots, x_n) \tag{I.I}$$

Соответствующая система бихарактеристик (в смысле §2,гл.I) имеет вид уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = p_i \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad i=1,\ldots,n$$

Предварительно докажем лемму. Рассмотрим общую систему Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \qquad i=1,\ldots,n \tag{I.2}$$

Предположим, что третьи производные от $H$ непрерывны.

Предположим, что система (I.2) имеет $n$ - пара - метрическое не пересекающееся семейство решений:

$$x(\beta,t), \; p(\beta,t) \qquad \beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$$

Лемма 5.I. Якобиан $Y^{-1} = \det \left\| \frac{d\beta_i}{\partial x_j} \right\|$ удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial t} + \operatorname{div} Y^{-1} \operatorname{grad} S = 0$$

Доказательство. Рассмотрим $dY/dt$, где

$$Y = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial \beta_j} \right\|$$

Очевидно,

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{i=1}^{n} D_i \ ,$$

где $D_i$ получается из $Y$ заменой элементов $i$-той строки на $\partial^2 x_i / \partial t \, \partial \beta_j$, $j=1,\dots,n$

Но $$\frac{\partial x_i(\beta,t)}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

(см. /59, 3)/) и

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \, \partial \beta_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \, \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \beta_j}$$

От остальных строк определителя $D_i$ линейно не зависит только $i$-тый член суммы, поэтому

$$D_i = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} Y,$$

т.е. $dY/dt = Y \Delta S$, следовательно,

$$dY^{-1}/dt + Y^{-1} \Delta S = 0$$

Отсюда $\partial Y^{-1}/\partial t + \operatorname{grad} Y^{-1} \operatorname{grad} S + Y^{-1} \Delta S = 0$, что и требовалось доказать.

Для $\sqrt{Y^{-1}}$ получаем уравнение

$$2\frac{\partial\sqrt{Y^{-1}}}{\partial t}+div(\sqrt{Y^{-1}}\,grad\,S)+grad\,S\,grad\sqrt{Y^{-1}}=0 \qquad (1.3)$$

Перейдем к выводу характеристического представления для уравнения $(1.1)$ Подставляя

$$\psi(x,t)=\sqrt{Y^{-1}}\,e^{i/h\,S(x,t)}\varphi(x,t) \qquad (1.4)$$

в $(1.1)$ и учитывая, что для любой дифференцируемой функции $R(x_i)$

$$-ih\frac{\partial}{\partial x_i}R(x_i)e^{\frac{i}{h}S}=e^{\frac{i}{h}S}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)R(x_i),$$

а $S$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}(grad\,S)^2+V(x)=0,$$

мы получим $ih\frac{\partial}{\partial t}\left(Y^{-1/2}\varphi\right)=$

$$=-\frac{1}{2}h^2\Delta\left(Y^{-1/2}\varphi\right)-\frac{1}{2}ih\left[div\left(Y^{-1/2}\varphi\,grad\,S\right)+grad\,S\,grad\,Y\right.$$

Отсюда

$$ih\left\{\frac{\partial Y^{-1/2}}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[div\,Y^{-1/2}grad\,S+grad\,S\,grad\,Y^{-1/2}\right]\right\}\varphi+$$

$$+ihY^{-1/2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+grad\,S\,grad\,\varphi\right\}=-\frac{h^2}{2}\Delta\left(Y^{-1/2}\varphi\right) \qquad (1.$$

Сделаем замену

$$\varphi(x,t)=\varphi(x(\beta,t),t)=\tilde{\varphi}(\beta,t)$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}S \qquad (1.6)$$

Из $(1.6)$ и $(1.5)$ получаем окончательно

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=\frac{ih}{2}Y^{1/2}\Delta_\beta\, Y^{-1/2}\tilde{\varphi}(\beta,t)\ , \qquad (1.7)$$

где $\Delta_\beta$ – оператор Лапласа в "криволинейных" координатах $\beta$. Это и есть характеристическое представление уравнения Шредингера в малом.

## 2°. Оценка обратного оператора.

Рассмотрим оператор Гамильтона (самосопряженный)

$$\hat{H}=-\frac{h^2}{2}\Delta+v(x,t) \qquad x=x_1,\dots,x_n \qquad (1.8)$$

в пространстве $L_2[R^n]$

Обозначим через $L_1[L_2]$ пространство интегрируемых по Бохнеру функций от $t$ на отрезке $0\leq t\leq t_0$ со значениями в $L_2[R^n]$. Через $V$ обозначим прямую сумму $L_1[L_2]\oplus L_2$. Обозначим через $C[L_2]$ пространство непрерывных функций $t$ $0\leq t\leq t_0$ со значениями в $L_2$.

Нормы в этих пространствах имеют следующий вид

$$\|g\|_{L_1[L_2]}=\int_0^{t_0}\sqrt{\int_{\infty}^{\infty}|g(t,x)|^2dx}\;dt \qquad \text{для}\quad g\in L_1[L_2]$$

Если $g\in C[L_2]$, то

$$\|g\|_{C[L_2]}=\max_{0\leq t\leq t_0}\sqrt{\int_{\infty}^{\infty}|g(t,x)|^2dx}$$

Для $g \in L_1[L_2]$, $f \in L_2$, $\{g, f\} \in V$.

Имеем
$$\| \{g, f\} \|_V = \| g \|_{L_1[L_2]} + \| f \|_{L_2}$$

Рассмотрим оператор $\hat{L}$ с областью определения, лежащей в $C[L_2]$ и областью значений, лежащей в $V$, действующий следующим образом:

$$\hat{L}\, g(t,x) = \left\{ \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} + \frac{i}{h} \hat{H} g(t,x),\ g(0,x) \right\} \in V$$

для $g(t,x) \in D(\hat{L}) \subset C[L_2]$

В силу леммы 4.1 гл. 4 ч. 1 в частности следует, что $\| \hat{L}^{-1} \| \leq const.$ В случае, когда $v(x,t)$ не зависит от $t$ этот факт очевидным образом следует из самосопряженности оператора $\hat{H}$. Действительно, если
$$\hat{L}\, u(t,x) = \{ f(x),\ \mathcal{F}(x,t) \}$$

то очевидно, что
$$u(t,x) = \hat{L}^{-1} \{ f(x),\ \mathcal{F}(x,t) \} = e^{\frac{i}{h}\hat{H}t} f + \int_0^t e^{\frac{i}{h}\hat{H}(t-\tau)} \mathcal{F}(x,\tau)\, d\tau$$

Отсюда
$$\| u(t,x) \|_{L_2} \leq \| f \|_{L_2} + \int_0^{t_0} \| \mathcal{F}(x,\tau) \|_{L_2}\, d\tau \qquad (1.9)$$

и

$$\underset{0 \le t \le t_0}{\mathrm{Max}} \| u(t,x) \|_{L_2} \le \| f \|_{L_2} + \| F \|_{L_1[L_2]} \qquad (1.10)$$

Рассмотрим теперь пространство $\tilde{L}_2[R^n]$

функций от $\beta$ $(\beta = \beta_1, \dots, \beta_n)$

с нормой

$$\| f \|_{\tilde{L}_2} = \sqrt{\int |f(\beta)|^2 d\beta}$$

Ему соответствуют пространства

$$L_1[\tilde{L}_2],\ C[\tilde{L}_2]$$

Оператор $M$ :

$$M f(\beta,t) = Y^{-1/2}(\beta(x,t),t)\, e^{i/h\, S(\beta(x,t),t)} f(\beta(x,t),t)$$

унитарно отображает пространство $\tilde{L}_2$ на $L_2$.

Действительно, пусть

$$g(x,t) = Y^{-1/2} e^{\frac{i}{h} S(x,t)} f(\beta,t) \quad .$$

тогда

$$\int |g(x,t)|^2 dx = \int |f(\beta,t)|^2 Y^{-1} dx = \int |f(\beta,t)|^2 d\beta ;$$

точно также оператор $M$ отображает $\tilde{V}$ на $V$ ,

$L_1[\tilde{L}_2]$ на $L_1[L_2]$ и $C[\hat{L}_2]$ на $C[L_2]$

с сохранением нормы.

Оператор $\hat{L}$ при таком преобразовании переходит в оператор $\hat{L}_1$ с областью определения, лежащей в $C[\tilde{L}_2]$ и областью значения, лежащей в $\tilde{V}$. Очевидно, что норма $\|\hat{L}^{-}\| = \|\hat{L}^{-1}\| \le t_0$. В силу вышеизложенного оператор $\hat{L}_1$ действует следующим образом

$$\hat{L}_1 u(t,\beta) = \left\{ u(0,\beta), \frac{\partial u}{\partial t} + ih\hat{H}_1 u \right\}$$

где

$$\hat{H}_1 = -\frac{Y^{1/2}}{2}\Delta_\beta Y^{-1/2}$$

( $\Delta_\beta$ - оператор Лапласа в координатах $\beta$ )

## 3°. Ряд теории возмущений.

Рассмотрим теперь оператор $\hat{L}_0$ иа $C[\tilde{L}_2]$ в $\tilde{V}$ вида

$$\hat{L}_0 u(t,\beta) = \left\{ u(0,\beta), \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$$

и оператор $\tilde{H}_1$ из $C[\tilde{L}_2]$ в $\tilde{V}$ вида

$$\tilde{H}_1 u(t,\beta) = \left\{ 0, \hat{H}_1 u(t,\beta) \right\}$$

Имеем

$$\hat{L}_1 = \hat{L}_0 + ih\tilde{H}_1 ,$$

причем

$$\|\hat{L}_0^{-1}\| \le t_0 , \quad \|\hat{L}_1^{-1}\| \le t_0$$

Кроме того, если $f(\beta)$, $\mathcal{F}(\beta,t)$ 2к раз диффе - ренцируемы по $\beta$ и потенциал $V(x,t)$ 2к раз дифференцируем по $x$, то выражение $\hat{L}_0^{-1}(\tilde{H}_1\hat{L}_0^{-1})^k\{f(\beta),\mathcal{F}(\beta,t)\}$

существует и принадлежит $C[\tilde{L}_1]$ .

Следовательно, все условия теоремы §3. гл. 3 части 1 выполнены, и мы имеем для $g \in \tilde{V}$

$$\hat{L}_1^{-1} g = \sum_{i=0}^{k} h^i \hat{L}_0^{-1} (\tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^i g + h^k z_h(t,\beta)$$

где $\| z_h(t,\beta) \|_{C[\tilde{L}_1]} \to 0$ при $h \to 0$.

В частности, если $g = \{0, \mathcal{F}(\beta,t)\}$, то

$$\hat{L}_0^{-1} g(\beta,t) = \int_0^t \mathcal{F}(\beta,t)dt \quad \text{и} \quad \tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1} g = \{0, \tilde{H}_1 \int_0^t \mathcal{F}(\beta,t)dt\},$$

$$(\tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^2 g = \int_0^t \tilde{H}_1 dt \int_0^{t'} \tilde{H}_1 dt' \int_0^{t''} \mathcal{F}(\beta,t'')dt'' \quad \text{и}$$

$$\hat{L}_1^{-1} \{0, \mathcal{F}(\beta,t)\} = \sum_{i=0}^{k} h^i \int_0^t \tilde{H}_1 dt_1 \ldots \int_0^{t_{i-1}} \tilde{H}_1 dt_{i-1} \int_0^{t_i} \mathcal{F}(\beta,t_i)dt_i + h^k z_h(t,\beta)$$

Аналогично

$$\hat{L}_1^{-1} \{f(\beta), 0\} = \sum_{i=0}^{k} h^i \int_0^t \tilde{H}_1 dt_1 \int_0^{t_1} \tilde{H}_1 dt_2 \ldots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \tilde{H}_1 f(\beta) +$$

$$+ h^k z_h(t,\beta)$$

Следовательно, решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\beta) = ih \tilde{H}_1 u(t,\beta)$$

$$u(0,\beta) = f(\beta)$$

имеет вид

$$u(t,\beta) = \sum_{i=0}^{k} h^i \int_0^t \tilde{H}_1 dt_1 \ldots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \tilde{H}_1 f(\beta) + h^k z_h(t,\beta),$$

где $\underset{}{Max} \| z_h(t,\beta) \|_{\tilde{L}_2} \to 0$

при $h \to 0$, если выражение, стоящее под знаком суммы, является непрерывной функцией $t$ и квадратно интегрируемой функцией $\beta$. Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $f(\beta)=f(\beta,h)$ является аналитической функцией $h$.

Рассмотрим теперь решение задачи

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h}{2}\Delta\psi + \frac{v(x)}{h}\psi \tag{I.II}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0 = \varphi(x,h)\, e^{i/h\, S_0(x)} \tag{I.I2}$$

Теорема 5.I.

Решение задачи (I.II)-(I.I2) при условии, что $v(x)\in C^4$, $\varphi(x,h)\in C^2$, $f(x)\in C^4$, представимо в виде

$$\psi = J^{-1/2}\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{S}(\beta,t)\right\}\varphi(\beta,h) + z_h(\beta,t)$$

Этот результат, также как и результаты следующего параграфа, очевидным образом переносится на случай, когда потенциал зависит от времени.

## § 2. Теорема вложения для абстрактных функций и оценки в счетно-нормированных пространствах.

### I°. Теорема вложения.

Для дальнейшего нам понадобится следующая Теорема вложения.

Пусть $A$ – производящий оператор группы в банаховом пространстве $B$, такой, что $\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|<1$ при $\varepsilon>0$ и $\varepsilon$ чисто мнимом. Пусть $\Phi(x)\in L_2[R^n B]$ принадлежит области определения операторов $(\partial/\partial x_i)^{[\frac{n}{2}]+1}$, $i=1,\dots,n$ и $A^{[\frac{n}{2}]+1}$

Положим $a_n = ((-1)^n + 3)/4$

Тогда $\operatorname{Vrai\,sup} \| A^{a_n} \Phi(x) \|_B \leq const.$

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{F}(x) = (1 + A)^{[\frac{n}{2}]+1} \Phi$$

Значит $\Phi(x) = (R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} \mathcal{F}(x)$,

где $R_{-1}^A = (1 + A)^{-1}$ . Заметим, что $\| A R_{-1}^A \| \leq 2$,

поскольку $A R_{-1}^A = 1 - R_{-1}^A$

Обозначим $\| \mathcal{F}(x) \|_B = |\mathcal{F}|$, $\tilde{\mathcal{F}}(p) = \Phi^{x_n} \tilde{\mathcal{F}}(x)$ Фурье-образ $\mathcal{F}(x)$

Тогда

$$\left| A^{a_n} (R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} \mathcal{F}(x) \right| = \left| \frac{(R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} A^{[\frac{n}{2}]+1}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iApx} \tilde{\mathcal{F}}(p)\, dp \right| \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| (A R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p) \right| dp = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + (p^2)^{[\frac{n}{2}]+1}} \frac{(A R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)}{\sqrt{1 + (p^2)^{[\frac{n}{2}]+1}}}$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + (p^2)^{[\frac{n}{2}]+1}) [(A R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)]^2 dp} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(p^2)^{[\frac{n}{2}]+1} + 1}}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(A R_{-1}^A)^{[\frac{n}{2}]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)|^2 dp \leq 2^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(p)|^2 dp = 2^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(x)|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |[p(A R_{-1}^A)]^{[\frac{n}{2}]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)|^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} |[R_{-1}^A (-\Delta)^{1/2}]^{[\frac{n}{2}]+1} \mathcal{F}(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |[(-\Delta)^{1/2}]^{[\frac{n}{2}]+1} \Phi(x)|^2 dx$$

Если $[\frac{n}{2}]+1$ четно, то ограниченность правой части равенства следует из условия теоремы вложения. Если же $[\frac{n}{2}]+1$ нечетно, то, используя тождество

$$\|(-\Delta)^{1/2} f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(-\Delta)^{1/2} f(x)|^2 dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Delta f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla f(x)|^2 dx\,,$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(-\Delta)^{1/2}(-\Delta)^{1/2[\frac{n}{2}]}\Phi(x)|^2 dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(-\Delta)^{\frac{1}{2}[\frac{n}{2}]}\Phi(x)\,\Delta\left[(-\Delta)^{\frac{1}{2}[\frac{n}{2}]}\Phi(x)\right]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(-\Delta)^{\frac{1}{2}[\frac{n}{2}]}\Phi(x)|^2 dx$$

Ограниченность последнего интеграла следует из условия теоремы вложения. Аналогично доказательство проводится и для $A$ удовлетворяющего условию $\|(1-\varepsilon A)^{-1}\| \le 1$ при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon$ - чисто мнимом. Общий случай получается с помощью разложения $A = A^+ + A^-$, где $A^+$ и $A^-$ - неотрицательные операторы.

Замечание I. Если оператор $A$ положительно определен, то $A^{-1}$ существует и ограничен, В этом случае в теореме вложения вместо $R_{-1}^A$ мы можем брать

$$R_0^A = A^{-1}$$

2°. <u>Операторы в счетно-нормированных пространствах</u>.

Рассмотрим пространство $S_h$ со счетным числом норм вида

$$\|\mathcal{F}\|_{k,\ell,m} = \max_{\substack{0\le t\le t_0 \\ 0<h\le h_0 \\ |x|<\infty}} \left|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k x^m \hat{p}^{\,\ell}\mathcal{F}(x,t,h)\right|, \qquad k,m,\ell = 1,2,\ldots \tag{2.I}$$

где $x^m = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\ell_j}$, $\sum \ell_j = m$, $\hat{p}^{\,\ell} = \prod_{\nu=1}^{n}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\ell_\nu}$, $\sum_{\nu=1}^{n}\ell_\nu = \ell$

Рассмотрим также пространство $R_h$ со счетным числом

норм вида

$$\| \mathcal{F} \|^2_{k,m,\ell} = \max_{\substack{0\le t\le t_0 \\ 0<h\le h_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k x^m \hat{p}^\ell \mathcal{F}(x,t,h)\right|^2 dx$$

<u>Лемма 5.2а</u> . Пусть $\mathcal{F}(x,t,h) \in R_h$ ,тогда

$$\Phi^{x_n}_{1/h} \mathcal{F}(x,t,h) \in R_h \ .$$

Доказательство.

Обозначим

$$\tilde{\mathcal{F}}(p,t,h) = \Phi^{x_n}_{1/h} \mathcal{F}(x,t,h) \ .$$

Очевидно, что

$$p^\beta \left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)^\alpha \tilde{\mathcal{F}}(p,t,h) = \Phi^{x_n}_{1/h} \left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta x^\alpha \mathcal{F}(x,t,h) \ .$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| p^\beta \left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)^\alpha \tilde{\mathcal{F}}(p,t,h)\right|^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta x^\alpha \mathcal{F}(x,t,h)\right|^2 dx.$$

Отсюда следует утверждение леммы 5.2а.

Очевидно, что $S_h$ вложено в $R_h$

Лемма 5.2 Пусть $g(x,t,h) \in R_h$ ; тогда x/

$$h^{n/2} g(x,t,h) \in S_h \qquad (2.2)$$

Доказательство.

В силу теоремы вложения

$$\left|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k x^m \hat{p}^{\ell} g(x,t,h)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h^{n/2}} \left(C_n \|g\|_{k,m,\ell} + C_n' \|g\|_{k,m,\ell+\frac{n}{2}+1}\right)$$

Следовательно, $h^{n/2} g(x,t,h) \in S_h \subset R_h$

Лемма доказана.

Рассмотрим следующие пространства: $W_2^{\ell}(\hat{p})$ с нормой

$$\|g\|^2_{W_2^\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^i g(x)|^2 dx$$

и $K_\ell(x,\hat{p})$ с нормой

$$\|g\|^2_{K_\ell} = \sum_{i+j\leq \ell} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^i x^j g(x)|^2 dx$$

Теорема 5.2. Если $y(x,h) \in S_h$ то $h^{n/2} e^{\frac{i}{h}\hat{H}t} y(x,h) \in S_h$,

---

x/ Точнее $g(x,t,h)$ можно изменить на множестве меры нуль, так чтобы выполнялось включение (2.2)

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 5.3 Пусть существуют $\ell$ ограниченных производных $v(x)$ ; тогда оператор $exp(\frac{i}{h}\hat{H}t)$ равномерно ограничен в пространстве $W_2^{\ell}(\hat{p})$ при $0<h\le h_0$, $0\le t\le t_1$

Доказательство. Как было показано в [51, 1)] , имеет место тождество

$$[\hat{B}, e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}] = \frac{i}{h}\int_0^t e^{\frac{i}{h}\hat{H}(t-t')}[\hat{B},\hat{H}]e^{\frac{i}{h}\hat{H}t'}dt' \qquad (2.3)$$

Оно приводит к неравенству

$$\|\hat{B}g\|_{L_2} \le \|\hat{B}y\|_{L_2} + \frac{t}{h}\max_{0\le t\le t_1}\|[\hat{B},\hat{H}]g\|_{L_2}, \qquad (2.4)$$

где

$$g = exp(\frac{i}{h}\hat{H}t)\,y, \quad \left(\|g\|^2_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty}|g|^2dx, [\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)$$

Предположим, что лемма справедлива при $\ell=k$. Очевидно, что коммутатор $[\hat{p}^{k+1},\hat{H}] = [\hat{p}^{k+1}, v(x)]$ в силу ограниченности производных $v(x)$ будет ограничен в $W_2^k$. Из (2.4) вытекает, что если $y\in W_2^{k+1}$ , то норма $\|\hat{p}^{k+1}g\|_{L_2}$ ограничена, поскольку по индуктивному предположению $g\in W_2^k$
Лемма доказана.

Лемма 5.4 Пусть $\ell$ производных $v(x)$ равномерно ограничены. Тогда оператор $exp(\frac{i}{h}\hat{H}t)$ равномерно ограничен в пространстве $K_\ell(x,\hat{p})$ при $0<h\le h_0$, $0\le t\le t_1$.

Доказательство

Сделаем индуктивное предположение. Предположим, что $g \in K_{\ell-1}$ и что норма $\| x^{m-1} \hat{p}^{\ell-m+1} g \|_{L_2}$ ограничена. Докажем, что $g \in K_\ell$ тогда норма $\| x^m \hat{p}^{\ell-m} g \|_{L_2}$ тоже будет ограничена. При $m=1$ индуктивное предположение выполняется в силу леммы 5.3 Первый член правой части тождества

$$[x^m \hat{p}^{\ell-m}, \hat{H}] g = x^m [\hat{p}^{\ell-m}, v(x)] - ih m x^{m-1} \hat{p}^{\ell-m+1} g$$

ограничен по норме в $L_2$, поскольку $g \in K_{\ell-1}$, а второй - в силу нашего индуктивного предположения. Из $(2.4)$ следует, что норма $\| x^m \hat{p}^{\ell-m} g \|_{L_2}$ также будет ограничена. При $\ell=1$ индуктивное предположение очевидно. Лемма доказана.

Докажем теперь, что если $y(x,h) \in R_h$, то $\exp(\frac{i}{h}\hat{H}t) y(x,h) \in R_h$ (тогда из леммы 5.2 будет следовать утверждение теоремы). Для этого остается доказать, что норма $\| (ih\frac{\partial}{\partial t})^\kappa g \|_{L_2}$ равномерно ограничена при $0 < h \le h_0$, $0 \le t \le t_1$, если $y \in R_h$. Это следует из тождества

$$\| (ih\frac{\partial}{\partial t})^\kappa g \|_{L_2} = \| \exp(\frac{i}{h}\hat{H}t) \hat{H}^\kappa y \|_{L_2} = \| \hat{H}^\kappa y \|_{L_2}$$

Теорема доказана.

Из последнего рассуждения следует также следующая важная для дальнейшего

Теорема 5.Iа

Оператор $\left[ i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{h}\hat{H} \right]^{-1}$ отображает $R_h$ в $R_h$.

Аналогичная теорема может быть доказана в случае, когда потенциал $v(x)$ зависит также и от времени. При этом следует опираться на оценку ( 2.1 ) леммы .4.1. части.1.

Теорема 5.Iа справедлива и в случае когда оператор $\hat{H}$ есть оператор первого порядка Дирака. Доказательство этого проводится аналогично доказательству теоремы 4.Iа.

Из теоремы 5.I вытекает следующее предложение:

Теорема 5.2. Решение задачи $(1.11)$, $(1.12)$ может быть представлено в виде $(1.10)$, где $z(x,t,h) \in S_h$.

Доказательство. Переход к квазиклассическому представлению совершается с помощью замены

$$\psi = Y^{-\frac{1}{2}}[\exp(\tfrac{i}{h}S)]\,u$$

Очевидно, что если $u \in S_h$ , то и $\psi \in S_h$ и обратно.

Доказательство теоремы проводится с помощью следующей леммы, относящейся, вообще, к абстрактной теории возмущений

Лемма 5.5

Пусть $A, C, U_i$ , $i=1,\dots,N$ – линейные операторы с областями определения и областями значений, лежащими в счетно-нормированном пространстве $B^\infty$ Оператор $C$ имеет обратный, коммутирует с $A$ и $U_i$ , определен на всем $B^\infty$ , сужение $\tilde{A}$ оператора $A$ имеет обратный,x/ а область значений оператора $C^{-m}(A-\sum_{i=1}^{N} C^i U_i)$ равна $B^\infty$.

Предположим, что существуют решения $x_0,\dots,x_{N_1+m+1}$ уравнения $Ax=0$ , такие, что

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1}\sum_{i=1}^{k} U_i f_{k-i} \qquad (a) \qquad \text{при} \quad k=1,\dots,N_1+m+1$$

принадлежат области определения оператора $B=\sum_{i=1}^{N} C^{i-1}U_i$

Тогда существует решение уравнения

$$(A-\sum_{i=1}^{N} c^i U_i)\,y = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} \in B^\infty,$$

которое может быть представлено в виде

$$y = \sum_{k=0}^{N_1} c^k f_k + \sum_{k=0}^{N_1} c^k \tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F} + c^{N_1+1} f$$

---

x/ т.е. уравнение $Ax=0$ при $x \in D(A)$ может иметь и нетривиальное решение, а при $x \in D(\tilde{A})$ имеет лишь тривиальное решение.

где $f$ - некоторый элемент из $B^{\infty}$, при условии, что

$$\sum_{K=0}^{N_1+m} C^K \tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^K \mathcal{F} \in \mathcal{D}(B)$$

Доказательство.

Подействуем оператором $A-CB$, где $B=\sum_{l=1}^{N} C^{l-1} U_l$ на элемент вида

$$\psi = \sum_{K=0}^{N_1+m} C^K f_K + \sum_{K=0}^{N_1+m} C^K \tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^K \mathcal{F}.$$

Поскольку $A\tilde{A}^{-1}B = B$ и $Ax_j = 0$, то $Af_K = \sum_{l=1}^{K} U_l f_{K-l}$ и

$$A\psi = \sum_{n=1}^{N_1+m} C^n \sum_{l=1}^{n} U_l f_{n-l} + \sum_{K=0}^{N_1+m} C^K (B\tilde{A}^{-1})^K \mathcal{F} =$$

$$= \sum_{K=0}^{N_1+m+1} C^{K+1} \sum_{j=0}^{K} U_{j+1} f_{K-j} + \sum_{K=0}^{N_1+m} C^K (B\tilde{A}^{-1})^K \mathcal{F}$$

где полагаем $U_j = 0$ при $j > N$.

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{N} C^j U_j \psi = C\sum_{i=0}^{N-1} C^i U_{i+1}\psi = \sum_{K=0}^{N+m+N_1+1} C^{K+1} \sum_{i=0}^{K} U_{i+1} f_{K-i} - \sum_{K=1} C^K (B\tilde{A}^{-1})^K \mathcal{F}.$$

Поэтому

$$\left[A - \sum_{i=1}^{N} C^i U_i\right]\psi = \sum_{K=N_1+m}^{N+m+N_1-1} C^{K+1} \sum_{i=0}^{K} U_{i+1} f_{K-i} + (B\tilde{A}^{-1})^{N_1+m+1} C^{N_1+m+1} \mathcal{F} + \mathcal{F}$$

$$= C^{N_1+m+1} g + \mathcal{F}$$

где $g \in B^{\infty}$ в силу условия леммы. Таким образом

$$(A+CB)\psi = C^{N+1+m} g + \mathcal{F}$$

В силу условия леммы существует решение $v$ уравнения

$$C^{-m}(A+CB)v = g$$

Очевидно, что

$$y = \psi - C^{N+1} v$$

служит решением уравнения

$$(A+CB)y = \mathcal{F}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Положим в лемме 5.5

$$B^{\infty} = S_h, \quad A = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{A} = i\frac{\partial}{\partial t}$$

на функциях, обращающихся в ноль при $t=0$, $B=H_1$, $C=h$

Условия леммы для оператора

$$i\frac{\partial}{\partial t} + hH_1$$

выполнены, поскольку область его значений, как мы доказали, равна $S_h$ .

Решениями уравнения

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

служат функции, зависящие лишь от $x_0 = x_{01}, \ldots, x_{0n}$

Отсюда следует, что решение уравнения

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + hH_1\right) u = 0$$

может быть представлено в виде

$$u = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k h^k \sum_{j=0}^{k} \left(-i\int_0^t dt\, H_1\right)^j \varphi_{k-j} + \sum_{k=0}^{N} (-h)^k \left(-i\int_0^t dt\right)\left(-H_1 i\int_0^t dt\right)^k \mathcal{F} +$$

$$+ h^{N+1} f,$$

где $f \in S_h$.

Следовательно решение $\psi$ задачи (1.8), (1.9) может быть представлено в виде (1.10), где

$$z(x,t,h) = \sqrt{J}\, f\, e^{-\frac{i}{h}S} \in S_h,$$

что и требовалось доказать.

## § 3. Релятивистские уравнения

### 1°. Уравнение Дирака.

Рассмотрим уравнение Дирака.

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\Phi(x,t)\psi - c\gamma\left(ih\nabla + \frac{e}{c}A(x,t)\right)\psi - mc^2\psi =$$

$$= ih\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}_m\psi = 0, \qquad (3.1)$$

где

$\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ $\qquad x = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$A(x,t) = \{A_1, A_2, A_3\}$ и $\Phi(x,t)$ – векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, которые являются здесь заданными функциями $x, t$.

Предположим, что решение уравнения (3.1) удовлетворяет начальному условию вида

$$\psi\big|_{t=0} = \varphi_0(x)\, e^{\frac{i}{h}S_0(x)} \qquad (3.2)$$

Рассмотрим соответствующее уравнению (3.1) классическое уравнение Якоби-Гамильтона

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi\right)^2 - c^2\left(\nabla S - \frac{e}{c}A\right)^2 - m^2c^4 = 0 \qquad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что $\partial S/\partial t$ имеет два значения. Решения $x^{\pm}(t) = X^{\pm}(x_0,t)$, $p^{\pm}(t) = P^{\pm}(x_0,t)$, $S^{\pm}(t) = S^{\pm}(x_0,t)$ системы уравнений Гамильтона

$$\frac{dx_i^{\pm}}{dt} = \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i^{\pm}}{dt} = -\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i}; \quad x^{\pm}\big|_{t=0} = x_0, \; p^{\pm}\big|_{t=0} = \nabla S_0(x_0) \qquad (3.4)$$

$$\frac{dS^{\pm}}{dt}=-H^{\pm}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}}p_i^{\pm} \qquad i=1,2,3$$

$$H^{\pm}(x,p,t)=e\Phi\mp c\sqrt{\left(p-\frac{e}{c}\mathcal{A}\right)^2+m^2c^2}$$

соответствующие знакам $\pm$, отвечают двум ветвям решения уравнения Якоби-Гамильтона. Предположим, что $\mathcal{A}(x,t)$ и $\Phi(x,t)$ ограничены вместе со своими двумя производными, и вторые производные от $S_0(x)$ также ограничены. Тогда (см. гл.8 § 2) при $t$, меньшем некоторого $t_0$, семейства решений системы $(3.4)$, соответствующие знаку "+" (также как и знаку "-"), не пересекаются, якобиан

$$J^{\pm}(x_0,t)=\det\left\|\frac{\partial X_i^{\pm}(x_0,t)}{\partial x_{0j}}\right\|$$

отличен от нуля, и решение уравнения $X^{\pm}(x_0,t)=x$ единственно: $x_0^{\pm}=x_0^{\pm}(x,t)$.

Пусть $S^{\pm}(x,t)=S_{\pm}(x_0,t)$ - две ветви решения уравнения $(3.3)$, удовлетворяющие условию $S^{\pm}(x,0)=S_0(x)$. Квадрированное уравнение Дирака (см.[86],[81,2])имеет вид

$$\left[\left(ih\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)^2-c^2\left(ih\nabla+\frac{e}{c}\mathcal{A}\right)^2-m^2c^4+hR(x,t)\right]\chi=0, \qquad (3.5)$$

где $R(x,t)$ - четырехрядная матрица вида

$$R(x,t)=ec\left[(\sigma,\bar{H})+i(\alpha\bar{E})\right]$$

$\bar{E}(x,t)$, $\bar{H}(x,t)$ - векторы электромагнитного поля, а $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ - четырехрядные матрицы Паули [ 86 ]

Полагая

$$\chi\Big|_{t=0}=\varphi_0(x)\,e^{\frac{i}{h}S_0(x)}$$

$$ih \left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{t=0} = \left\{e\Phi + c\gamma\left(ih\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + mc^2\right\}\varphi_0 e^{\frac{i}{h}S_0(x)}, \qquad (3.6)$$

мы получим, что $X = \psi$, где $\psi$ – решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию (3.2) (см. гл. I). Обозначим через $\beta(x_0, t)$ функцию $\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}(x_0, t)$, а через

$$f = \exp\left\{-i\frac{1}{2mc^2}\int_0^\tau R[X(x_0,t),t]\Big|_{t=t(\tau)} d\tau\right\} f_0,$$

где

$$\tau = \tau(x_0, t) = \int_0^t \sqrt{1-\beta^2(x_0,t)}\, dt,$$

решение задачи

$$i\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{2mc^2} R[X(x_0,t),t]_{t=t(\tau)} f \qquad f(0) = f_0$$

Заменами $X^{\pm} = \varphi^{\pm} |J^{\pm}|^{-1/2} \sqrt[4]{\dfrac{c^2 - [\dot{X}^{\pm}(x_0,t)]^2}{c^2 - [\dot{X}^{\pm}(x_0,t)]^2}} \exp\left\{\frac{i}{h} S^{\pm}(x,t)\right\}$;

$$\varphi^{\pm}[X^{\pm}(x_0,\tau), t^{\pm}(x_0,\tau)] = \Theta_{\pm}(x_0,\tau) \qquad (3.6a)$$

$$\mathcal{H}_{\pm}(x_0,\tau) = \exp\left\{-\frac{i}{2mc^2}\int_0^\tau R[X^{\pm}(x_0,t),t]_{t=t(\tau)} d\tau\; \Theta_{\pm}(x_0,\tau)\right.$$

уравнение (3.5) приводится к виду ("квазиклассические представления" уравнения Дирака для электрона („+") и позитрона ("–") )

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial \tau} = -\frac{ih}{2mc^2}\, \sigma_{\pm}(x_0,\tau)\, \Box_{x_0,\tau} |J|^{-1/2} \sigma_{\pm}^{-}(x_0,\tau)\, \mathcal{H}_{\pm}$$

где

$$\sigma_{\pm}(x_0,\tau) = \sqrt[4]{\frac{c^2 - [\dot{X}^{\pm}(x_0,0)]^2}{c^2 - [\dot{X}^{\pm}(x_0,t)]^2}} \exp\left\{\frac{i}{2mc^2}\int_0^\tau R(X^{\pm}(x_0,t),t)\, d\tau\Big|_{t=t(\tau)}\right\}, \qquad (3.6в)$$

$\Box_{x_0,\tau}$ – оператор Даламбера в "криволинейных"

Этот результат следует, аналогично из дополнения (см. § 5 "Решение уравнений переноса"). Пусть $A(x,t)$, $\Phi(x,t)$, $S_0(x)$ – бесконечно дифференцируемы. Пусть

$$\frac{\partial \mathcal{H}_n^{\pm}}{\partial \tau} = -\frac{ih}{2mc^2} \cdot e^{-\frac{i}{2mc^2}\int_0^{\tau} R^{\pm} d\tau} \sigma_{\pm} |J^{\pm}|^{1/2} \Box_{x_0,\tau} |J^{\pm}|^{-1/2} e^{-\frac{i}{2mc^2}\int_0^{\tau} R^{\pm} d\tau} \sigma_{\pm} \mathcal{H}_{n-1}^{\pm}$$

$$\mathcal{H}_0^{\pm}\big|_{\tau=0} = \mathcal{F}^{\pm}(x_0, h), \quad \mathcal{H}_n^{\pm}\big|_{\tau=0} = 0 \quad n>0 \quad \mathcal{H}_{-1} = 0,$$

где $\mathcal{F}^{\pm}(x_0, h)$ – бесконечно дифференцируемые функции $x_0$ и $h$. Обозначим

$$\chi_N^{\pm} = e^{\frac{i}{h} S^{\pm}(x,t)} \sigma_{\pm} |J^{\pm}|^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{\frac{i}{2mc^2}\int_0^{\tau} R^{\pm} d\tau} \sum_{n=0}^{N} \mathcal{H}_n^{\pm} \right\}_{x_0 = x_0^{\pm}(x,t)} \tag{3.6c}$$

Доказательство того, что существуют решения $\psi^+$ и $\psi^-$ уравнения Дирака (3.1), такие, что

$$\psi^+ - \chi_N^+ = h^{N+1} z(x,t,h)$$

$$\psi^- - \chi_N^- = h^{N+1} z_1(x,t,h), \tag{3.6d}$$

где $z(x,t,h) \in S_h$ и $z_1(x,t,h) \in S_h$, проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 5.2. При этом надо воспользоваться оценками решения уравнения (3.5), аналогичными тем, которые были получены для уравнения Шредингера. Все рассуждения относительно уравнения Шредингера, как мы уже говорили в замечаниях к теореме 4.1 переносятся на случай неквадрированного уравнения Дирака (3.1).

$2^{0}$. Оценки для решений квадрированного уравнения Дирака и уравнения Кляйна – Гордона – Фока.

Обозначим через $Q_m$ оператор (3.5),

определенный на достаточно гладких вектор-функциях

$u(x,t) \in C(\tilde{L}_2)$, удовлетворяющих условию $u(x,0) = u'_t(x,0) = 0$. Здесь $\tilde{L}_2$ пространство вектор-функций с интегрируемым квадратом.

Обозначим далее через $L_{\pm m}$ замкнутый оператор из $C(\tilde{L}_2)$ в себя вида

$$L_{\pm m}\, u(x,t) = ih \frac{\partial u}{\partial t} - \hat{H}_{\pm m}\, u,$$

где $\hat{H}_{\pm m}$ определено в (3.1), определенный на достаточно гладких функциях $u(x,t) \in C(\tilde{L}_2)$,

удовлетворяющих

условию: : $u(x,0)=0$.

Теорема 5.3 Операторы $hL_m^{-1}$ и $hL_{-m}^{-1}$ отображают $R_h$ в $R_h$.

Эта теорема доказывается аналогично теореме 5.1а.

Нетрудно убедиться, /см. [86] /, что

$$Q_m = L_m \cdot L_{-m} = L_{-m} L_m$$

Очевидно, что на $D(L_m) = D(L_{-m})$

справедливо тождество

$$\overset{\circ}{\alpha} mc^2 = L_{-m} - L_m$$

Отсюда

$$Q_m^{-1} = L_{-m}^{-1}\, L_m^{-1} = \frac{1}{2mc^2}\left(L_m^{-1} - L_{-m}^{-1}\right)$$

Отсюда следует

Теорема 5.4 Справедлива оценка

$$\operatorname{Max}\sqrt{\int |Q_m^{-1} f(x,t)|^2\, dx} \le \frac{1}{h}\int_0^t \sqrt{\int |H(x,t)|^2\, dx}$$

Обозначим через $\tilde{L}_{\pm m}$ оператор из пространства $C(\tilde{L}_2)$ в прямую сумму $\tilde{L}_2 \oplus C(\tilde{L}_2)$ вида

$$\tilde{L}_{\pm m}\, u(x,t) = \left\{ u(x,0),\ ih\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \hat{H}_{\pm m}\, u(x,t)\right\}$$

а через $\tilde{Q}_m$ - оператор из пространства $C[\tilde{L}_2]$ в прямую сумму $\tilde{L}_2 \oplus \tilde{L}_2 \oplus C(\tilde{L}_2)$.

вида:

$$\tilde{Q}_m u(x,t) = \{u(x,0); ih\frac{\partial u}{\partial t}(x,0); [(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi)^2 - c^2(ih\nabla + \frac{e}{c}A)^2 - m^2c^4 + hR(x,t)]u(x,t)\}$$

Справедливо тождество

$$\tilde{Q}_m^{-1}\{y_1, y_2, 0) = \frac{1}{2mc^2}\left[\tilde{L}_m^{-1}\{y_2 - \hat{H}_{-m}y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}^{-1}\{-y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\}\right] \qquad (3.7)$$

В нем можно убедиться, подействовав на обе части равенства (3.7) оператором $\tilde{Q}_m$. Действительно, поскольку

$$ih\left.\frac{\partial \tilde{L}_{\pm m}^{-1}\{y,0\}}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{H}_{\pm m}\tilde{L}_{\pm m}^{-1}\{y,0\}\Big|_{t=0} = \hat{H}_{\pm m}y,$$

то $$\tilde{Q}_m[\tilde{L}_m^{-1}\{y_2 - \hat{H}_{-m}y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}^{-1}\{-y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\}] =$$

$$= \{y_2 - \hat{H}_{-m}y_1 - y_2 + \hat{H}_m y_1,\ \hat{H}_m(y_2 - \hat{H}_{-m}y_1) + \hat{H}_{-m}(-y_2 + \hat{H}_m y_1), 0\} = 2mc^2\{y_1, y_2, 0\}$$

Аналогично теореме 5.2 можно получить теорему

<u>Теорема 5.5.</u> Если $y \in S_h$, то $h^{n/2}\tilde{L}_m^{-1}\{y,0\} \in S_h$.

Отсюда и из равенства (3.7) следует

<u>Теорема 5.6.</u> Если $y, y_1 \in S_h$, то $h^{n/2}\tilde{Q}_m^{-1}\{y,y_1,0\} \in S_h$

и далее

<u>Теорема 5.5а.</u> Если $y \in R_h$, то $\tilde{L}_m^{-1}\{y,0\} \in R_h$

<u>Теорема 5.6а.</u> Если $y, y_1 \in R_h$, то $\tilde{Q}_m\{y,y_1,0\} \in R_h$

<u>Теорема 5.7.</u> Существуют решения $\psi^+$ и $\psi^-$ уравнения (3.1), такие, что

$$\psi^+ - \chi_N^+(x,t) = h^{N+1} z(t,x,h)$$

и

$$\psi^- - \chi_N^-(x,t) = h^{N+1} z_1(t,x,h),$$

где $z_1$ и $z \in S_h$.

**Аналогичные утверждения мы докажем для решений уравнения Клейна-Гордона-Фока.**

Рассмотрим оператор Клейна-Гордона-Фока

$$K = Q_m - hR(x,t)$$

Формальное разложение $K^{-1}$ в ряд по степеням $hRQ_m^{-1}$ имеет вид

$$K^{-1} = Q_m^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} h^k (RQ_m^{-1})^k \tag{3.8}$$

Последний ряд сходится. Действительно, для оператора $RL_m^{-1}$ справедлива оценка (см. лемма 4.1 часть I)

$$\| RL_m^{-1} f \|_{\tilde{L}_2} \leq \| R \| \frac{1}{h} \int_0^t \| f \|_{\tilde{L}_2} dt$$

Поскольку $Q_m^{-1} = \frac{1}{2mc^2}(L_m^{-1} - L_{-m}^{-1})$, то из предыдущего неравенства следует

$$\| Q_m^{-1} f \|_{\tilde{L}_2} \leq \frac{\| R \|}{mc^2 h} \int_0^t \| f \|_{\tilde{L}_2} dt$$

Отсюда получаем оценку

$$\| Q_m^{-k} f \|_{\tilde{L}_2} \leq \frac{\| R \|^k}{(mc^2 h)^k} \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} \| f \|_{\tilde{L}_2} dt_k \leq$$

$$\leq \frac{\| R \|^k}{(mc^2 h)^k} \frac{t_0^k}{k!}$$

из которой следует сходимость ряда в $(3.8)$ и неравенство

$$\| K^{-1} \| \le \frac{const}{h}$$

Рассмотрим пространство $\tilde{S}_h$ со счетным числом норм вида

$$\| \varphi(x,t,h) \|_i = \max_{\substack{0 \le t \le t_0 \\ 0 < h \le 1}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^i \varphi(x,t,h)|^2 dx} \; ,$$

где $\hat{p} = -ih \frac{\partial}{\partial x}$

Теорема 5.8.

Если коэффициенты уравнения Клейна-Гордона-Фока бесконечно дифференцируемы, то оператор $hK^{-1}$ определен всюду в $\tilde{S}_h$, т.е. для любого $f \in \tilde{S}_h$ справедливо включение $hK^{-1} f \in \tilde{S}_h$.

Доказательство.

Сначала докажем, что

$$\| \hat{p}^i R L_m^{-1} \varphi \|_{L_2} \le \frac{const}{h} \int_0^t \sum_{j=1}^{i} \| \hat{p}^i \varphi \|_{L_2} dt \; ,$$

где $const$ зависит только от $i$.

Доказательство проведем по индукции. При $i=0$ сделанное утверждение верно. Пусть оно верно при $i \le N-1$

Оценим $\| \hat{p}^N R L_m^{-1} \varphi \|_{L_2}$

Учитывая тождество $[A, B^{-1}] = -B^{-1}[A,B]B^{-1}$

получим

$$\| \hat{p}^N R L_m^{-1} \varphi \|_{L_2} \le \| R L_m^{-1} \hat{p}^N \varphi \|_{L_2} + \| [\hat{p}^N, R] L_m^{-1} \varphi \|_{L_2} +$$

$$+ \| R L_m^{-1} [\hat{p}^N, L_m] L_m^{-1} \varphi \|_{L_2}$$

Для первого слагаемого имеет место оценка

$$\| R L_m^{-1} \hat{P}^N \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leq const \frac{1}{h} \int_0^t \| \hat{P}^N \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt$$

Для суммы остальных слагаемых из условий теоремы и индуктивного предположения следует

$$\| [\hat{P}^N, R] L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} + \| R L_m^{-1} [\hat{P}^N, L_m] L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leq \frac{const}{h} \int_0^t \sum_{j=0}^{N-1} \| \hat{P}^j \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt$$

Таким образом, индукция завершена. Из доказанного утверждения получаем

$$\| \hat{P}^i R Q_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leq \frac{const}{h} \int_0^t \sum_{j=0}^{i} \| \hat{P}^j \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt$$

и так же как при доказательстве (3.8) делаем вывод, что

$$\| \hat{P}^i h^k (R Q_m^{-1})^k \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leq \frac{const \cdot i^k}{k!} \sum_{j=0}^{i} \| \hat{P}^j \varphi \|_{\tilde{L}_2}$$

Подставляя эту оценку в (3.8) и учитывая (см. теорему 5.4), что если $\varphi \in \tilde{S}_h$, то $h Q_m^{-1} \varphi \in \tilde{S}_h$, получаем, что $h K^{-1} \varphi \in \tilde{S}_h$.

Пусть теперь $\varphi \in R_h$ и $u = h K^{-1} \varphi$. Имеем

$$K x_i u = [K, x_i] u + h \varphi x_i = h f + h \varphi(x) \qquad i = 1, \ldots, n$$

По доказанному $f \in \tilde{S}_h$. По условию $x_i \varphi \in \tilde{S}_h$. Значит $x_i u \in \tilde{S}_h$. По индукции получаем, что $x_i^n u \in \tilde{S}_h$ и значит $u \in R_h$, т.е. $h K^{-1} \in R_h \to R_h$. Обозначим через $\tilde{K}$

оператор из пространства $C(L_2)$ в прямую сумму

$$L_2 \oplus L_2 \oplus C[L_2]$$

вида

$$\tilde{K}\, u(x,t) = \left\{ u(x,0),\ ih\frac{\partial u}{\partial t}(x,0), \left(ih\frac{\partial u}{\partial t} + e\Phi\right)^2 - c^2\left(ih\nabla - \frac{e}{c}A\right)^2 u - m^2c^4 u \right\}.$$

Аналогично предыдущей теореме из тождества 3.7 получаем теорему

Теорема 5.8а

Если $y_1 \in R_h$, $y_2 \in R_h$, то

$$\tilde{K}^{-1}\{y_1, y_2, 0\} \in R_h.$$

## § 4. Разложение произвольных начальных условий на компоненты, отвечающие различным корням характеристического многочлена

Покажем теперь, что начальное условие вида

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h} S_0(x)\right], \quad u'_t\Big|_{t=0} = \varphi_1(x)\exp\left[\frac{i}{h} S_0(x)\right]$$

может быть разложено на слагаемые, соответствующие различным корням характеристического многочлена.

Рассмотрим для простоты уравнение второго порядка

$$\left\{\left(i\frac{\partial}{\partial t} - A\Phi(x,t)\right)^2 - c^2\left[-\nabla^2 + \gamma^2 A^2\right] + \left(\bar{B}(x,t), \operatorname{grad}\right) + A R(x,t)\right\} u(x,t), \tag{4.1}$$

На общий случай уравнения (1.16) гл. I все рассуждения непосредственно переносятся, однако, получаются более громоздкие выражения. Характеристическое уравнение для (4.1) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\Phi(x,t)\right)^2-c^2\left[(\nabla S)^2+\gamma^2\right]=0 \qquad (4.2)$$

Двум ветвям решения этого уравнения

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}=-H^{\pm}(x,\nabla S^{\pm},t) \qquad (4.3)$$

$$H^{\pm}(x,p,t)=+\Phi(x,t)\mp c\sqrt{p^2+\gamma^2} \qquad (4.4)$$

соответствуют две системы бихарактеристических уравнений

$$\frac{dx_i^{\pm}}{dt}=\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i} \qquad i=1,\dots,n \qquad (4.5)$$

Пусть $\{X(x_0,t),\ P(x_0,t)\}$ - решениебихарактеристической системы $(4.5)$, удовлетворяющее начальным условиям вида:

$$X(x_0,0)=x_0,\quad P(x_0,0)=grad\ S_0(x_0),$$

и пусть уравнение $X(x_0,t)=x$

однозначно разрешимо относительно $x_0$: $x_0=x_0(x,t)$

Введем обозначение:

$$S^{\pm}(x,t)=S_{\pm}(x_0,t)$$

Введем функцию $v^{\pm}(x,t)$ с помощью соотношения $v^{\pm}(x,t)=u(x,t)exp\{-i\,S^{\pm}(x,t)A\}$. $(4.6)$

Подставив в уравнение $(4.1)$ $u=v^{\pm}exp\{i\,S^{\pm}(x,t)A\}$, получим следующее уравнение для $v^{\pm}(x,t)$:

$$A\Big(2\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t}+\frac{\partial\Phi v^{\pm}}{\partial t}+\Phi\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t}-2c^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v^{\pm}}{\partial x_i}\frac{\partial S^{\pm}}{\partial x_i}-$$

$$-\left[(\bar B(x,t),grad\ S^{\pm})+\Box S^{\pm}-i\,R(x,t)\right]v^{\pm}\Big\}=$$

$$=-i\left[\Box v^{\pm}+(\bar B(x,t),grad\ S^{\pm})\right] \qquad (4.7)$$

где $\Box = c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Рассмотрим уравнение (4.7) в представлении, в котором оператор $A$ диагонален и является оператором умножения на $\omega$:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \, d E_\omega^A$$

Решение $v^\pm(x,t,\omega)$ представим формально в виде ряда по степеням $1/\omega$

$$v^\pm(x,t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^\pm(x,t) \frac{1}{\omega_k} \qquad (4.8)$$

Теперь формально выпишем для функций

$$v_j^\pm = \sum_{\alpha=0}^{j} b_\alpha^\pm(x,t)\,\omega^{-\alpha}$$

рекуррентные соотношения:

$$2\frac{\partial S^\pm}{\partial t}\frac{\partial v^\pm}{\partial t} + \frac{\partial \Phi v_j^\pm}{\partial t} + \Phi\frac{\partial v_j^\pm}{\partial t} - 2c^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S^\pm}{\partial x_k}\frac{\partial v_j^\pm}{\partial x_k} -$$

$$-\left[(\bar{B}, \operatorname{grad} S^\pm) + \Box S^\pm - iR(x,t)\right] v_j^\pm =$$

$$= -i\left[\Box v_{j-1}^\pm + (\bar{B}, \operatorname{grad} v_{j-1}^\pm)\right] \qquad (4.9)$$

Пусть при $t=0$ $\quad S^\pm = S_0(x), \quad \Phi = \Phi_0(x)$.

Положив в соотношении (4.9) $j=0$, $v_{-1}^\pm = 0$, $t=0$

получим:

$$\left.\frac{\partial v_0^\pm}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial S^\pm}{\partial t}\right|_{t=0} + \Phi_0(x)\right)^{-1}\left\{2c^2(\nabla S_0, \nabla) + \right.$$

$$+(\bar{B}(x,0), \nabla S_0) + \Box S^{\pm}\Big|_{t=0} - iR(x,0) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big\} v_0^{\pm}(x,0) =$$

$$= B_1^{\pm} v_0^{\pm}(x,0) \qquad (4.10)$$

Мы будем называть начальные условия вида

$$u_N^{\pm}\Big|_{t=0} = \varphi_0^{\pm}(x,\omega) e^{i\omega S_0(\omega)} \qquad (4.11)$$

$$\frac{\partial u_N^{\pm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Big\{ i\omega \frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi_0^{\pm} + \frac{\partial v_N^{\pm}}{\partial t}\Big|_{t=0} \Big\} e^{i\omega S_0(x)}, \qquad (4.12)$$

где $\varphi_0^{\pm}(x,\omega)$ – две произвольные аналитические функции $\omega$ и бесконечно дифференцируемые функции $x$, соответственно положительными и отрицательными. Они отвечают двум корням характеристического многочлена.

<u>Лемма</u> 5.6

Начальное условие вида

$$u\Big|_{t=0} = \psi(x,\omega) e^{i\omega S_0(x)} \cdot \quad u'_t\Big|_{t=0} = 0 \qquad (4.13)$$

или же вида

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad u'_t\Big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x,\omega) e^{i\omega S_0(x)} \qquad (4.14)$$

может быть представлено с точностью до $O(\omega^{-(N+1)})$ в виде суммы положительного и отрицательного начальных условий:

$$u\Big|_{t=0} = u_N^{+}\Big|_{t=0} + u_N^{-}\Big|_{t=0} + O(\omega^{-(N+1)}) \qquad u'_t\Big|_{t=0} = 0 \qquad (4.15)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Big(\frac{\partial u_N^{+}}{\partial t} + \frac{\partial u_N^{-}}{\partial t}\Big)\Big|_{t=0} + O(\omega^{-(N+1)}) \qquad (4.16)$$

$$u\big|_{t=0}=0,$$

где $\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t}\Big|_{t=0}$ и $u_N^{\pm}\big|_{t=0}$ определяются формулами (4.11) и (4.12)

Доказательство

Для доказательства леммы необходимо найти такие функции $\varphi^{+}(x,\omega)$ и $\varphi^{-}(x,\omega)$, что

$$u\big|_{t=0}=(u_N^{+}+u_N^{-})\big|_{t=0}+O(\omega^{-(N+1)}) \qquad (4.15)$$

$$u'_t\big|_{t=0}=\left(\frac{\partial u_N^{+}}{\partial t}+\frac{\partial u_N^{-}}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}+O(\omega^{-(N+1)}), \qquad (4.16)$$

т.е.

$$\psi(x,\omega)=\varphi^{+}+\varphi^{-}+O(\omega^{-(N+1)})$$

$$i\omega\left(\frac{\partial S^{+}}{\partial t}\Big|_{t=0}\varphi^{+}+\frac{\partial S^{-}}{\partial t}\Big|_{t=0}\varphi^{-}\right)+\frac{\partial v_N^{+}}{\partial t}\Big|_{t=0}+$$

$$+\frac{\partial v_N^{-}}{\partial t}\Big|_{t=0}=O(\omega^{-(N+1)})$$

Разлагая $\psi(x,\omega)$, $\varphi^{\pm}(x,\omega)$ в ряды по степеням $1/\omega$ и приравнивая коэффициенты при $\omega$ в нулевой степени, получим

$$\varphi_0^{+}+\varphi_0^{-}=\psi_0$$

$$\left(\Phi_0+c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\right)\varphi_0^{+}+\left(\Phi_0-c^2\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\right)\varphi_0^{-}=0$$

Отсюда

$$\varphi_0^{\pm}=\frac{\mp\Phi+c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}}{2c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}}\,\psi_0 .$$

Приравнивая коэффициенты при $\omega^{-1}$, получим

$$\varphi_1^+ + \varphi_1^- = \psi_1$$

$$i\left(\Phi_0 + c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\right)\varphi_1^+ + i\left(\Phi_0 - c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\right)\varphi_1^- =$$

$$= B_1^+\psi_0 + B_1^-\psi_0 ,$$

поскольку $v_0(x,0) = \psi_0(x)$

Отсюда

$$\varphi_1^{\pm} = \mp \frac{\left(\Phi_0 \mp c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\right)\psi_1 + B_2\psi_0}{2c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}} ,$$

где $B_2\psi_0 = i(B_1^+ + B_1^-)\psi_0$

Аналогичным образом могут быть получены и $\varphi_k^{\pm}(x)$ при $k \leq N$.

Подобные формальные разложения начальных условий на слагаемые, соответствующие различным корням характеристического многочлена могут быть произведены и для произвольного уравнения с операторными коэффициентами вида (1.16) гл. 1

Подобные разложения проводились Людвигом для систем гиперболического типа [50]

## §5. Дополнение:

### Решение уравнений переноса для некоторых уравнений (систем) волнового типа.

Важным инструментом решения уравнений переноса будет являться следующее вспомогательное

Предложение А.

Пусть уравнение $\frac{dx}{d\tau} = \mathcal{F}(x)$, $x = x_1, \ldots, x_{n+1}$ имеет семейство интегральных кривых $x(\tau, a_1, \ldots, a_n)$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{D(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})}{D(a_1, \ldots, a_n, \tau)} = \operatorname{div} \mathcal{F}$$

Это предложение легко получается с помощью небольшой модификации леммы С.Л.Соболева (см. Смирнов т. 4, стр. 448).

Обратимся теперь к рассмотрению конкретных уравнений волнового типа.

Рассмотрим слабо связанную гиперболическую систему с различными характеристиками

$$L\psi = \frac{\partial^m \psi}{\partial t^m} + \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n+1} \leq m \\ k_{n+1} \neq m}} a_{k_1 \ldots k_{n+1}}(x,t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_{n+1}}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} \psi = 0 \quad (5.1)$$

; Здесь $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ - вектор-функция с $N$ компонентами и матрицы $a_{k_1 \ldots k_{n+1}}$ при $k_1 + \cdots + k_{n+1} = m$ пропорциональны единичной матрице. Введем следующие обозначения:

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) \equiv \sum_{k_1+\ldots+k_{n+1}=m} a_{k_1 \ldots k_{n+1}} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial t^{k_{n+1}}} + \frac{\partial^m}{\partial t^m}$$

$$\sum_{k_1+\ldots+k_{n+1}=m-1} a_{k_1 \ldots k_{n+1}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial t^{k_{n+1}}} = B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right)$$

Пусть $S(x,t)$ - решение одной из ветвей характеристического по отношению к $(5.1)$ уравнения. Подставим в систему $(5.1)$ $\psi = u e^{i\omega S}$ и приравняем нулю коэффициент при $\omega^{-m+1}$. Полученное уравнение называется уравнением переноса для $(5.1)$.

Уравнение переноса можно представить в виде

$$\frac{du}{d\tau} + \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} + B\right) u = 0 \qquad (5.2)$$

(для случая, когда $B$ пропорциональна единичной матрице это уравнение выведено в / /; обобщение тривиально). Здесь $\tau$ - параметр; $\left(t|_{\tau=0} = 0, \ x_{n+1} = t\right)$.
Вместо $x, p, t$ нужно подставить соответствующие функции $\tau$, вычисленные вдоль бихарактеристик системы $(5.1)$ т.е. вдоль характеристик характеристического уравнения.

Сделав замену $u = exp\{-\int_0^\tau B d\tau\} v$
перепишем уравнение переноса в виде

$$\frac{dv}{d\tau} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} v = 0$$

Очевидно, что направление вектора $v$ не меняется вдоль бихарактеристики. Поэтому можно искать $v$ в виде

$$v = v_0 e^{\varphi} J^{-1/2},$$

где $v_0 = const$,

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{D}(t,x)}{\mathcal{D}(\tau,x_0)}$$

Получим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\ln\mathcal{J} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_i\,\partial p_j}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0$$

Воспользуемся предложением А. Для того, чтобы использовать это предложение, выпишем уравнения для $x(\tau)$, $t(\tau)$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial\Lambda}{\partial p_i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}}$$

Имеем

$$\frac{d}{d\tau}\ln\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial p_i}\left(\nabla S,\frac{\partial S}{\partial t},x,t\right) + \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}}\left(\nabla S,\frac{\partial S}{\partial t},x,t\right)$$

Подставляя в уравнение переноса полученное выражение для

$$\frac{d}{d\tau}\ln\mathcal{J},$$

получим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_i\,\partial x_i} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_{n+1}\,\partial t} = 0$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\tau}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_i\,\partial x_i} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_{n+1}\,\partial t}\,d\tau\right\}\right.$$

Переходя к интегрированию по $t$ и учитывая, что

$$\mathcal{J}=\frac{\mathcal{D}(t,x)}{\mathcal{D}(\tau,x_0)}=\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}x_0}\,\frac{dt}{d\tau}=\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}x_0}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}},$$

получим результат, который сформулируем в виде леммы

**Лемма 5.7**

Решение уравнения (5.2) имеет вид

$$u=u(0)\sqrt{\frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1}\frac{\mathcal{D}x_0}{\mathcal{D}x}}\times$$
$$\times\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_i\,\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_{n+1}\,\partial t}-B\right]dt\right\}\tag{5.3}$$

Пример.

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2(x,t)\,\Delta u=0.$$

Здесь

$$\Lambda(p,p_{n+1},x,t)=p_{n+1}^2-c^2(x,t)\,p^2;\quad B\equiv 0$$

Уравнение переноса имеет вид

$$\frac{du}{d\tau}+u\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}-c^2\Delta S\right)=0,$$

где $t$ и $\tau$ связаны уравнением

$$\frac{dt}{d\tau}=2p_{n+1},\qquad \text{и т.к.}\quad p_{n+1}^2-c^2p^2=0,$$

то

$$\frac{dt}{d\tau}=\pm 2c|p|$$

Вычисляя производные от $\Lambda$ и подставляя их в $(5.3)$, получаем

$$u = \sqrt{\frac{c_0 |p_0|}{c |p|}}\, u_0 \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}\, \exp\left\{ \int_0^t \left[ \frac{(\nabla c \cdot p)}{\pm |p|} \right] dt \right\}.$$

Воспользовавшись уравнением $\dot{p} = \pm \nabla c\, |p|$
приходим к следующему выражению для $u$ :

$$u = \frac{|\dot{p}_0|^{3/2}}{|p|^{3/2}} \sqrt{\frac{c_0}{c}} \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}\, u_0 .$$

2. Рассмотрим уравнение волнового типа

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} + A\, \Phi(x,t) \right]^2 + c^2(x,t) \left( [\nabla - i A \mathcal{A}(x,t)]^2 - A^2 \gamma^2 \right) +$$

$$+ \sum_k{}' B_k(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k} + i A R(x,t) \Big\} \psi(x,t) = 0, \qquad (5.4)$$

введенное в ч. I,гл. I, § 2 и включающее в качестве частных случаев различные уравнения квантовой механики.

Потребуем, чтобы выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{i S(x,t) A} (-i A^{-1})^k \psi_k(x,t),$$

где $S(x,t)$ – решение характеристического для (5.4) уравнения, формально удовлетворяло уравнению (5.4) Уравнение, которому должна при этом удовлетворять функция $\psi_0$, назовем уравнением переноса для (5.4) Для решения уравнения переноса, соответствующего уравнению (5.4) применим следующий прием. Заменим в уравнении (5.4) оператор $iA$ на оператор $\frac{\partial}{\partial y}$ ( $y$ – новая переменная, которую мы вводим в дополнение к $x$ и $t$ ). Тогда (5.4) превратится в слабо связанную гиперболическую систему

$$\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right]^2+c^2\left[\left(\nabla-\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\gamma^2\right]+\right. \qquad (5.4)^*$$

$$\left.+\sum_{k} B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial y}R\right\}\psi=0$$

Используя решение уравнения переноса для $(5.4)^*$, данное выше, и подставляя в конечном результате $1$ вместо $p_y$, получаем следующий результат.

<u>Лемма 5.8</u>

Решение уравнения переноса для (5.4) имеет вид

$$\psi_0=\psi_0(0)\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}\;\frac{c(x_0,0)}{c(x,t)}\sqrt{\frac{(p_0-\mathcal{A}(x_0,0))^2-\gamma_0^2}{(p-\mathcal{A}(x,t))^2-\gamma^2}}}\;\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\int_0^t\frac{(1)^\nu}{2c\sqrt{(p-\mathcal{A})^2-\gamma^2}}\left[(p-\mathcal{A})^2\nabla c^2-B_k p_k-R\right]dt\right\}.$$

3. Рассмотрим теперь систему уравнений теории упругости

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda(x)+\mu(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\,\Delta u_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\,\mathrm{div}\,u + \frac{\partial \mu}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (5.5)$$

Характеристическое уравнение для (5.5) распадается на ветви, которые имеют вид:

$$\frac{\partial S_1^{\pm}}{\partial t} = \pm a\,|\nabla S_1^{\pm}|\,; \qquad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \qquad (5.6)$$

$$\frac{\partial S_2^{\pm}}{\partial t} = \pm b\,|\nabla S_2^{\pm}|\,; \qquad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (5.7)$$

Уравнение переноса для (5.5) определим аналогично тому, как мы это сделали для предыдущих уравнений

Решения уравнения переноса для $S_1^{\pm}$ будем называть продольными волнами, а для $S_2^{\pm}$ – поперечными волнами. Характеристическое и бихарактеристические уравнения будем называть также уравнением Якоби-Гамильтона и системой Гамильтона соответственно. Рассмотрим в отдельности случай продольных и поперечных волн. Приведенное ниже решение принадлежит В.Кучеренко [ 41 ].

а) Продольные волны.

Уравнение переноса после подстановки $u=\varphi\nabla S$, где $\varphi$ - скалярная функция, принимает вид

$$\nabla S M\varphi\nabla S=0.$$

Здесь $M$ - следующий оператор:

$$Mu=\rho u\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+2\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}-(\lambda+\mu)[div\, u\nabla S+\nabla(u\nabla S)-$$

$$-\mu(u\Delta S+2\nabla u\nabla S)-\nabla\lambda(u\nabla S)-\nabla S(u\nabla\mu)-u(\nabla\mu\nabla S)$$

(мы использовали обозначение: $\{\nabla u\nabla S\}$-

$$\{\nabla u\nabla S\}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j}$$

Используя уравнение Гамильтона-Якоби, можно получить следующие тождества (здесь и далее без уменьшения общности рассматривается волна, соответствующая $S^+$, знак "+-" опускается):

$$\nabla\frac{\partial S}{\partial t}=-\nabla a|\nabla S|-\frac{a}{2|\nabla S|}\nabla(\nabla S)^2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=a^2\frac{\nabla(\nabla S)^2\nabla S}{2|\nabla S|}+a\nabla a\nabla S$$

Подставляя $\varphi\nabla S$ в уравнение переноса и используя предыдущие равенства и уравнение Гамильтона-Якоби, получаем:

$$-(\lambda+2\mu)[\varphi\Delta S|\nabla S|^2+2\nabla\varphi\nabla S|\nabla S|^2+\varphi\nabla S\nabla(\nabla S)^2]-$$

$$-2\varphi\nabla\mu\nabla S|\nabla S|^2-(\nabla\lambda\nabla S)|\nabla S|^2\varphi+\frac{3}{2}a^2\rho\varphi\nabla S\Delta(\Delta S)^2+$$

$$= \rho a \nabla a \nabla S |\nabla S|^2 \varphi - 2a\rho |\nabla S|^3 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2 \nabla a \nabla S \; a |\nabla S|^2 \rho \varphi = 0$$

Напоминаем, что $\quad a = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$

Для дальнейшего упрощения уравнения воспользуемся леммой Л.С. Соболева (см. предложение А).

если $x$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{dx}{dt} = X(t,x)$, то

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}x_0} = \operatorname{div} X$$

Применительно к траекториям данной системы эта лемма дает

$$\Delta S = \frac{|\nabla S|}{a} \left[ \frac{d}{dt} \ln \frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}x_0} - \frac{\nabla a \nabla S}{|\nabla S|} + \frac{a \nabla S \, \nabla(\nabla S)^2}{2|\nabla S|^3} \right]$$

Используя это выражение для $\Delta S$, а также вытекающее из системы Гамильтона равенство

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\nabla f \nabla S}{|\nabla S|}$$

и тот факт, что $\rho$, $\lambda$ и $\mu$ не зависят явно от времени, приводим уравнение переноса к виду

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \sqrt{\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}x_0}} \; \frac{1}{a^2} \sqrt{\lambda + 2\mu}\; \varphi \right) = 0 ,$$

откуда

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \; \frac{\varphi_0}{\sqrt{\dfrac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}x_0}}} \; \frac{a}{a_0}$$

Точно такое же решение получается для волны, соответствующей $S^-$.

Полученный результат сформулируем в виде леммы:

**Лемма 5.9**

Вектор-функция

$$u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{\varphi_0}{\sqrt{\frac{Dx}{Dx_0}}} \frac{a}{a_0} \nabla S$$

удовлетворяет уравнению переноса для уравнения упругости в случае продольных волн.

б) Поперечные волны.

Положим $u = n v_n + \nu v_\nu$, где $v_n$ и $v_\nu$ - скалярны, $n$ и $\nu$ — два непрерывно дифференцируемых векторных поля таких, что

$$n\nu = n \nabla S = \nu \nabla S = 0 \quad \text{и} \quad n^2 = \nu^2 = 1$$

Уравнение переноса имеет вид:

$$n M(v_n \cdot n + v_\nu \cdot \nu) = 0$$

$$\nu M(v_n \cdot n + v_\nu \cdot \nu) = 0$$

Эти уравнения приводятся с использованием тех же тождеств, что и в случае продольных волн, к виду

$$\frac{d v_n}{dt} + v_n \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\rho \frac{Dx}{Dx_0}} + v_\nu \frac{d\nu}{dt} n = 0$$

$$\frac{d v_\nu}{dt} + v_\nu \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\rho \frac{Dx}{Dx_0}} + v_n \frac{dn}{dt} \cdot \nu = 0$$

Из $n\nu = 0$ вытекает

$$\frac{dn}{dt}\cdot\nu = -\frac{d\nu}{dt}\,n = T$$

Полагая $z = v_n + i v_\nu$, получаем

$$z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\, z_0 \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}\, e^{-i\int_0^t T\,dt}$$

Окончательный результат формулируем в виде леммы.

Лемма 5.10

Функция

$$u = n\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{Dx_0}{Dx}}\;\frac{v_{n0}}{\cos\gamma}\cos\left[\int_0^t \nu\,\frac{dn}{dt}\,dt + \gamma\right] +$$

$$+\nu\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{Dx_0}{Dx}}\;\frac{v_{n0}}{\cos\gamma}\sin\left[-\int_0^t \nu\,\frac{dn}{dt}\,dt + \gamma\right],$$

где $\gamma$ - константа, удовлетворяет уравнению переноса для уравнения упругости в случае поперечных волн.
(Если $\cos\gamma = 0$, то нужно положить

$$u = \nu\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{Dx_0}{Dx}}\; v_{\nu_0}\cos\left[\int_0^t \nu\,\frac{dn}{dt}\,dt\right].\;)$$

# ГЛАВА 6. АСИМПТОТИКА В МАЛОМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

В этой главе исследуется асимптотика решений уравнений $n$ - ого порядка по временной координате с операторными коэффициентами, зависящими от $x=(x_1,\dots,x_n)$ и частных производных по $x_1,\dots,x_n$. Результаты этой главы мы будем использовать существенно в для построения асимптотики в целом решений гиперболических уравнений.

Первые 2 параграфа носят вспомогательный характер. Они посвящены асимптотическому разложению интеграла вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} e^{iAf(x)} g(x)\,dx \qquad x=x_1,\dots,x_n,$$

где $g(x)$ - функция со значениями в банаховом пространстве $B$, $f(x)$ - функция со значениями на прямой, а $iA$ - производящий оператор группы в $B$. Задача заключается в том, чтобы вычислить этот интеграл с точностью до функций, принадлежащих $D(A^N)$. На основе полученных в § 2 формул и леммы 13 (v.1) теории возмущений строится асимптотика в малом решении операторных уравнений с частными производными. При этом предполагаются существование, единственность и гладкость решений таких уравнений.

## § I. <u>О корне квадратном из оператора в банаховом пространстве.</u>

Рассмотрим неограниченный оператор $A$ в банаховом пространстве $B$, обладающий следующими свойствами:

I) Оператор $A$ порождает однопараметрическую группу $e^{iAt}$, сильнонепрерывную и ограниченную для всех $t$:

$$\| e^{iAt} \| \leq M$$

при $-\infty \leq t \leq \infty$.

2) Оператор $(1+\gamma^2 A)^{-1}$ существует, определен всюду в $B$ при любом $\gamma > 0$ и ограничен единицей.

3) Оператор $A^{-1}$ существует.

Все утверждения лемм, доказанных ниже, непосредственно нереносятся и на случай, когда оператор $A$ удовлетворяет вместо условия 2) условию

2а) Оператор $(1-\gamma^2 A)^{-1}$ существует, определен всюду и ограничен единицей.

Из условия I) в силу теоремы Хилле-Филлипса-Иосида /см. т.1 гл.4, §1/ следует, в частности, что

$$\left\| \frac{1}{1-i\alpha A} \right\| \leq M \quad \text{при всех} \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Кроме того, имеем

$$\left\| \frac{1}{1-i\alpha A+\gamma^2 A} \right\| \leq \left\| \frac{1}{1+\gamma^2 A} \right\| \left\| \frac{1}{1-i\alpha \frac{A}{1+\gamma^2 A}} \right\| \leq M, \qquad (1.1)$$

поскольку в силу (2.8) части 1 гл.4, §2.

$$\| e^{iB_\gamma t} \| \leq M,$$

где $B_\gamma = \frac{A}{1+\gamma^2 A}$, а, значит, в силу той же теоремы Хилле-Филлипса-Иосида

$$\left\| \frac{1}{1-i\alpha B_\gamma} \right\| \leq M$$

Мы будем пользоваться следующей очевидной формулой "интегрирования по частям":

$$\int_0^1 e^{iAf(t)} \left( \frac{g(t)}{f'(t)} \right)' dt = -e^{iAf(0)} \frac{g(0)}{f'(0)} - iA \int_0^1 e^{iAf(t)} \frac{g(t)}{f'(t)} df(t). \tag{1.2}$$

Здесь $g(t)$ — дифференцируемая функция со значениями в $B$, обращающаяся в нуль при $t=1$.

Эта формула справедлива при условии, что интеграл, стоящий в левой части равенства, существует.

Лемма 6.I

Оператор
$$T = \frac{2e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} A \int_0^\infty e^{iAx^2} dx$$
существует как оператор в $B$ на области $D(A)$

Доказательство.

Пусть $g \in D(A)$. Докажем, что

$$f = \int_0^\infty e^{iAx^2} Ag\, dx \in B. \tag{1.3}$$

Разобьем интеграл $(1.3)$ на сумму двух интегралов:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

Очевидно, что

$$f_1 = \int_0^1 e^{iAx^2} Ag\,dx \in B : \|f_1\| \leq \int_0^1 \|e^{iAx^2} Ag\|\,dx \leq M\,\|Ag\| \qquad (1.4)$$

Теперь оценим норму

$$f_2 = \int_1^\infty e^{iAx^2} A\,g\,dx.$$

Сделаем замену

$$x^2 = t$$

Имеем

$$f_2 = \int_1^\infty e^{iAx^2} A g\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{iAt} Ag}{\sqrt{t}}\,dt$$

Применив формулу интегрирования по частям $(1.2)$, получим

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{iAt} Ag}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{i}{2} e^{iA} g - \frac{i}{4}\int_1^\infty \frac{e^{iAt} g}{t^{3/2}}\,dt \qquad (1.5)$$

Первый член правой части равенства $(1.5)$, очевидно, не превосходит $\frac{1}{2} M \|g\|$, а для второго члена справедлива оценка

$$\frac{1}{4}\left\|\int_1^\infty \frac{e^{iAt} g}{t^{3/2}}\,dt\right\| \leq \frac{1}{4}\int_1^\infty \left\|\frac{e^{iAt} g}{t^{3/2}}\right\| dt \leq$$

$$\leq \frac{M\|g\|}{4}\left|\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}\right| = M_1 \|g\|.$$

Таким образом, мы получаем, окончательно, что

$$\|f\| \leq C_1 \|Ag\| + C_2 \|g\|, \tag{1.6}$$

что и требовалось.

Определим оператор $P_\alpha$ следующим образом

$$P_\alpha g = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} g\, d\xi, \tag{1.7}$$

где $g \in B$, $\alpha > 0$ — действительное число.

Очевидно, что этот оператор ограничен и определен на всем $B$. Действительно,

$$\left\| \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} g\, d\xi \right\| \leq \int_0^\infty \| e^{iA\xi^2 - \alpha\xi^2} g \| d\xi \leq$$

$$\leq M \|g\| \int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2} d\xi = M_1 \|g\|$$

Лемма 6.2

*Имеет место равенство:*

$$P_\alpha^2 g = \frac{1}{A + i\alpha} g$$

для всех $g \in B$ и $\alpha > 0$.

Действительно,

$$P_\alpha^2 g = \frac{4}{\pi i} \int_0^\infty e^{iA\xi^2 - \alpha\xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2 - \alpha\eta^2} g\, d\eta =$$

$$= \frac{4}{\pi i} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{iAr^2 - \alpha r^2} g\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= -i \int_0^{\infty} e^{i(A+\alpha i)t} g\, dt =$$

$$= \frac{1}{A+i\alpha} g$$

(см. [ 28 ]).

**Лемма 6.3**

Для любого $g \in D(A)$ справедливо равенство :

$$T^2 g = A g$$

Доказательство. Обозначим $T_\alpha = A P_\alpha$, $D(T_\alpha) = D(A)$

Прежде всего, мы докажем, что

$$T_\alpha g = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{\infty} e^{iAx^2 - \alpha x^2} Ag\, dx \to Tg \qquad (1.8)$$

при $\alpha \to 0$, $g \in D(A)$, в смысле сильной сходимости в $B$.

Имеем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{\infty} e^{iAx^2} e^{-\alpha x^2} Ag\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{N^2} e^{iAx^2} e^{-\alpha x^2} Ag\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_N^{\infty} \frac{e^{iAt} e^{-\alpha t} Ag}{\sqrt{t}} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{N^2} e^{iAx^2} e^{-\alpha x^2} Ag\, dx -$$

$$-\sqrt{\frac{i}{\pi}}\,\frac{e^{-N\alpha}e^{iAN}}{\sqrt{N}}g-\sqrt{\frac{i}{4\pi}}\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t^3}}e^{iAt}g\,dt-$$

$$-\alpha\sqrt{\frac{i}{\pi}}\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}e^{iAt}g\,dt \qquad (1.9)$$

Очевидно, что предел первого члена правой части равенства $(1.9)$ при $\alpha\to 0$, а затем при $N\to\infty$ равен $Tg$. Из следующих ниже неравенств следует, что остальные члены правой части равенства $(1.9)$ пр $\alpha\to 0$, а затем при $N\to\infty$ стремятся к нулю:

1) $$\left\|\frac{e^{-N\alpha}e^{iAN}g}{\sqrt{N}}\right\|\le\frac{M\|g\|}{\sqrt{N}}$$

2) $$\left\|\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{3/2}}e^{iAt}g\,dt\right\|\le\int_N^\infty\frac{e^{-\alpha t}}{t^{3/2}}\|e^{iAt}g\|dt\le$$

$$\le M\|g\|/\sqrt{N}$$

3) $$\alpha\left\|\int_N^\infty\frac{e^{-\alpha t}e^{iAt}}{\sqrt{t}}g\,dt\right\|\le$$

$$\le\alpha M\|g\|\left|\int_N^\infty\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}dt\right|\le$$

$$\leq 2\alpha M \|g\| \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\alpha\pi}\, M \|g\|.$$

Таким образом, соотношение (1.8) доказано.

Рассмотрим теперь $T_\alpha^2$ и докажем, что

$$\lim_{\alpha\to 0} T_\alpha^2 = T^2 \quad \text{на} \quad D(A^2) \qquad (1.10)$$

Для $g \in D(A^2)$ имеем

$$T_\alpha^2 g = T_\alpha (T_\alpha - T) g + T_\alpha T g \qquad (1.10а)$$

Очевидно, что $A(T_\alpha - T)g = (T_\alpha - T)Ag \to 0$ при $\alpha \to 0$,

Аналогично доказанному выше неравенству (I.6) имеем:

$\|T_\alpha g_1\| \leq C_1 \|Ag_1\| + C_2 \|g_1\|$ для $g_1 \in D(A)$

Полагая $(T_\alpha - T)g = g_1$, получим

$$\|T_\alpha (T_\alpha - T)g\| \leq C_1 \|A(T_\alpha - T)g\| + C_2 \|(T_\alpha - T)g\| \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0 \quad (1.10б)$$

И поскольку $ATg = TAg \in B$

ибо $Ag \in D(A)$, а, значит, $Tg \in D(A)$, то

в силу (1.8) $T_\alpha T g \xrightarrow[\alpha\to 0]{} T^2 g$

Отсюда и из (1.10а) – (1.10б) следует (1.10)

Очевидно, что

$$T_\alpha^2 g = \frac{4}{\pi i}\int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2-\alpha\eta^2} d\eta\, A^2 g =$$

$$= -i\int_0^\infty e^{iAt-\alpha t} dt\, A^2 g =$$

$$= \frac{A^2}{A+i\alpha} g = \left(A - i\alpha - \frac{\alpha^2}{A+i\alpha}\right) g.$$

Поскольку $\left\| \frac{1}{A+i\alpha} \right\| \le \frac{M}{\alpha}$, то отсюда следует, что $T_\alpha^2 g \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} A g$ при $g \in D(A^2)$.

Таким образом, $T^2 g = A g$ в норме $\|g\| + \|Ag\|$ для $g \in D(A^2)$. По замыканию это тождество продолжается на область $D(A)$. Лемма доказана.

Обозначим через $\overline{P}_\alpha$ комплексно сопряженный к $P_\alpha$ оператор вида

$$\overline{P}_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-iAx^2} e^{-\alpha x^2} dx.$$

Лемма 6.4

Для любой функции $g \in B$ и $\alpha > 0$ справедливо равенство:

$$P_\alpha \overline{P}_\alpha g = \frac{1}{A+i\alpha}\left\{ \sum_{k=0}^{N} \frac{C_k \alpha^k}{(A+i\alpha)^k} g + \alpha^N g_N \right\},$$

где $g_N \in D(A^N)$, а $C_K$ - некоторые константы.

Доказательство.

Имеем

$$P_\alpha \overline{P}_\alpha g = \overline{P}_\alpha P_\alpha g = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{-iA\xi^2-\alpha\xi^2}d\xi\int_0^\infty e^{iA\eta^2-\alpha\eta^2} g\, d\eta =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^\infty e^{iAr^2-\alpha r^2}e^{-2iAr^2\cos^2\varphi}g\, r\, dr =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^\infty e^{iAt-\alpha t}e^{-2iAt\cos^2\varphi}g\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\alpha - iA(1-2\cos^2\varphi)}g =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\alpha+iA\cos 2\varphi}g = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\alpha+iA\cos\varphi}g = \frac{1}{\pi}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\alpha+iA\cos z}g,$$

где контур $C_\delta$ состоит из точек (1.10в)

$$z = \begin{cases} x & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}-\delta \\ \frac{\pi}{2}+\delta e^{i\varphi} & \text{при } 0 \le \varphi \le \pi \\ x & \text{при } \frac{\pi}{2}+\delta \le x \le \pi \end{cases}$$

Таким образом, на полуокружности

$$i\cos z = i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta e^{i\varphi}\right) = i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\cos\varphi\right)\operatorname{ch}(\delta\sin\varphi) +$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\cos\varphi\right)\operatorname{sh}(\delta\sin\varphi),$$ причём $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\cos\varphi\right)\operatorname{sh}(\delta\sin\varphi)$

$\geqslant 0$ при $\delta < \delta_0$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Отсюда следует, в силу (1.1),

$$\|(\alpha + i\cos z\, A)^{-1}\| \le M/\alpha,$$

когда $z \in C_\delta$.

Из (1.10в) следует

$$P_\alpha \bar{P}_\alpha g = \frac{1}{\pi(iA-\alpha)} \int\limits_{C_\delta} \frac{dz}{\cos z\left[1+\frac{\alpha(1+\cos z)}{(iA-\alpha)\cos z}\right]} g =$$

$$= \frac{1}{\pi(iA-\alpha)} \left\{ \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{C_\delta} \frac{\alpha^n}{\cos z}\left[\frac{1+\cos z}{(\alpha-iA)\cos z}\right]^n g\,dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{C_\delta} \frac{\alpha^{N+1}}{\cos z+\frac{\alpha(1+\cos z)}{iA-\alpha}}\left[\frac{1+\cos z}{(\alpha-iA)\cos z}\right]^{N+1} g\,dz \right\}$$

Поскольку интеграл $\frac{(-i)^n}{\pi}\int\limits_{C_\delta}\frac{1}{\cos z}\frac{(1+\cos z)^n}{(\cos z)^n}dz$ существует и равен некоторой константе $C_n$, то можно записать:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_\delta}\frac{dz}{\cos z+\frac{\alpha(1+\cos z)}{iA-\alpha}} g = \sum_{n=0}^{N}\frac{C_n\alpha^n}{(i\alpha+A)^n} g -$$

$$- \frac{\alpha^{N+1}}{(\alpha-iA)^N}\int\limits_{C_\delta}\frac{(1+\cos z)^{N+1}dz\,g}{(iA\cos z+\alpha)(\cos z)^{N+1}}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{\alpha}{(\alpha-iA)^N}\int\limits_{C_\delta}\frac{(1+\cos z)^{N+1}}{(iA\cos z+\alpha)(\cos z)^{N+1}} g\,dz \in D(A^N)$$

Действительно, $\left\| \frac{A^N\alpha}{(\alpha-iA)^N}\int\limits_{C_\delta}\frac{(1+\cos z)^{N+1}}{(iA\cos z+\alpha)(\cos z)^{N+1}} g\,dz \right\| \leq$

$$\leq \alpha \left\| \left[i\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-iA}\right)\right]^N \right\| \cdot \max_{C_\delta}\left|\frac{(1+\cos z)^{N+1}}{(\cos z)^{N+1}}\right| \left|\int\limits_{C_\delta}\|(iA\cos z+\alpha)^{-1}g\|dz\right.$$

$$\leq M(1+M)^N\|g\|\,C(N,\delta).$$

Лемма доказана.

Заметим, что, если A удовлетворяет условию 2a), то нужно брать $-\pi \leq \varphi \leq 0$.

**Лемма 6.5**

Для любого $g \in D(A)$ справедливо равенство

$$T\bar{T} = Ag \qquad (1.11)$$

**Доказательство.**

Имеем

$$T\bar{T}g = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{iAx^2} A\,dx \int_0^\infty e^{-iAy^2} A g\,dy$$

Аналогично тому, как было доказано в лемме 6.3 соотношение (1.10), получаем

$$\int_0^\infty e^{iAx^2} A\,dx \int_0^\infty e^{-iAy^2} A g\,dy =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{iAx^2 - \alpha x^2} A\,dx \int_0^\infty e^{-iAy^2 - \alpha y^2} A g\,dy \qquad (1.12)$$

Аналогично тому, как это было проделано в леммах 6.3 и 6.4 получаем

$$1)\ \frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{iAx^2 - \alpha x^2} dx \int_0^\infty e^{-iAy^2 - \alpha y^2} A^2 g\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{C_\gamma} \frac{dz}{\alpha + iA\cos z} A^2 g =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{C_\gamma} \left\{ \frac{A}{i\cos z} + \frac{\alpha}{\cos^2 z} - \frac{\alpha}{\cos^2 z\left(1 + \frac{iA}{\alpha}\cos z\right)} \right\} g\,dz$$

2) $$\left\| \frac{1}{1+\frac{iA\cos z}{\alpha}} \right\| \leq M$$

Поскольку

$$\frac{1}{i}\int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos z} = \pi; \quad \left\| \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos^2 z}\, g \right\| \leq C_1(\delta)\|g\|$$

$$\left\| \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos^2 z\left(1+\frac{iA\cos z}{\alpha}\right)}\, g \right\| \leq C_2(\delta)\, M\, \|g\|,$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{iAx^2-\alpha x^2}dx \int_0^\infty e^{-iAy^2-\alpha y^2} A^2 g\, dy = Ag$$

Отсюда и из (1.12) следует равенство (1.11) $g \in D(A^2)$. По замыканию в норме $\|g\|+\|Ag\|$ оно остается справедливым для всех $g \in D(A)$. Лемма доказана.

Лемма 6.6

Имеет место равенство

$$\overline{T} = T$$

Доказательство.

Для $g \in D(A^2)$ по предыдущей лемме

$$T\bar{T}g = Ag$$

С другой стороны, в силу леммы 6.3

$$T^2 g = Ag$$

Следовательно,

$$T\bar{T}g = T^2 g$$

для $g \in D(A)$. Значит, для $g \in D(A^2)$

$$T^2\bar{T}g = T^3 g,$$

т.е.

$$A\bar{T}g - ATg = 0$$

Отсюда в силу условия 3)

$$\bar{T}g = Tg$$

для $g \in D(A^2)$. По замыканию $\overbrace{\text{это равенство}}^{\text{в норме } \|g\| + \|Ag\|}$ сохраняется для всех $g \in D(A)$. Лемма доказана.

Отсюда следует, что если $A$ - оператор в действительном банаховом пространстве $B$, то и $T$ определен как оператор в $B$.

В дальнейшем оператор $T$ мы будем обозначать $T = \sqrt{A}$, а оператор $P_\alpha = (A + i\alpha)^{-1/2}$

Такие обозначения оправданы доказанными выше леммами.

В случае, когда $A$ "отрицательный", то есть удовлетворяет условию 2а), под $\sqrt{|A|}$ мы будем понимать $\sqrt{-A}$.

## § 2. Метод стационарной фазы для абстрактных функций.

В этом параграфе будут выведены асимптотические формулы метода стационарной фазы применительно к интегралам от абстрактных функций. Метод стационарной фазы для функций со значениями на прямой обоснован, например, в работах /79,21/30/

Приведем вначале известный формальный способ получения асимптотических формул метода стационарной фазы. При этом выводе, как мы увидим, встречаются расходящиеся интегралы, которые мы совершенно формально регуляризуем. Заметим, что обоснование метода стационарной фазы, которое здесь будет дано, ни в какой мере не опирается на приведенный ниже прием.

### 1°. Формальный прием вычисления членов асимптотического ряда.

Рассмотрим интеграл:

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int e^{\frac{i}{h} f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n , \qquad (2.1)$$

где $\varphi(x),\ f(x) \in C^{\infty}$, $\varphi(x)$ - финитна. Для вычисления членов асимптотики $I(h)$ при $h \to 0$ применяем следующий формальный метод.

Пусть $x = x_0$ - единственная стационарная точка, т.е. точка, в которой $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Разложим $f(x)$ и $\varphi(x)$ в асимптотические ряды Тейлора в окрестности точки $x = x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \ldots$$

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_j}(x_j-x_{0j})+\dots$$

Сделаем в интеграле (2.1) замену переменных:

$$x_j-x_{0j}=\sqrt{h}\,\xi_j .$$

Тогда

$$I(h)=e^{\frac{i}{h}f(x_0)}h^{n/2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int e^{-\varepsilon|\xi|^2}e^{\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}f_{kj}(x_0)\xi_k\xi_j}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{i\sqrt{h}\left[f_3(x_0,\xi)+\sqrt{h}f_4(x_0,\xi)+\dots\right]\right\}\left(\varphi(x_0)+\varphi_1(x_0,\xi)\sqrt{h}+\dots\right)d\xi \tag{2.2}$$

где

$$f_k(x_0,\xi)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x_0)\,\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k};$$

$$f_{ik}(x_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x_0)\qquad \varphi_k(x_0,\xi)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}^{n}\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x_0)\,\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}$$

Поскольку

$$\varphi(x)=\tilde{\varphi}(\xi)=\varphi(x_0)+\sqrt{h}\,\varphi_1(x_0,\xi)+\dots+h^{\nu/2}\varphi_\nu(x_0,\xi)+\dots,$$

то имеем

$$\psi(x_0,\xi)=\exp\left\{i\sqrt{h}\left(f_3(x_0,\xi)+\sqrt{h}f_4(x_0,\xi)+\dots\right)\right\}\tilde{\varphi}(\xi)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu/2}Q_\nu(x_0,\xi), \tag{2.3}$$

где $Q_\nu(x_0,\xi)$ - полином $\nu$ -той степени относительно $\xi_k$, $k=1,\dots,n$ с коэффициентами, являющимися линейными функциями производных $\varphi(x)$ до $\nu$ - ого порядка в стационарной точке $x=x_0$. Подставив $\psi(x_0,\xi)$ из $(2.3)$ в $(2.2)$, получим:

$$I(h)=e^{\frac{i}{h}f(x_0)}h^{n/2}\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu/2}C_\nu(x_0), \qquad (2.4)$$

где

$$C_\nu(x_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int e^{-\varepsilon|\xi|^2}e^{\frac{i}{2}\sum\limits_{k,j=1}^{n}f_{kj}(x_0)\xi_j\xi_k}Q_\nu(x_0,\xi)d\xi$$

При нечетных $\nu$ функция $Q_\nu(x_0,\xi)$ нечетна, и коэффициенты при полуцелых степенях $h$ обращаются в нуль. Следовательно,

$$I(h)=e^{\frac{i}{h}f(x_0)}h^{n/2}\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}C_{2\nu}(x_0),$$

где $C_{2\nu}(x_0)$ - линейная функция $\varphi(x)$ и ее производных по $x$ до $2\nu$ -ого порядка в точке $x=x_0$.

Обоснование этого разложения мы получим, опираясь в основном лишь на формулу интегрирования по частям x/ . Как уже

---

x/ Нетрудно получить и непосредственное обоснование вышеизложенного метода разложения и регуляризации интегралов взяв вне носителя функции $\varphi(x)$ область интегрирования в комплексном пространстве так, чтобы интегралы в формуле $(2.4)$ сходились.

было указано в предыдущем параграфе, эта формула для абстрактных функций $g(x)$ со значениями в банаховом пространстве $B$ и оператора $A$, порождающего группу в этом пространстве, имеет следующий вид:

$$\int_a^b e^{iAf(x)}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)' dx = -e^{iAf(a)}\frac{g(a)}{f'(a)} + iA\int_a^b e^{iAf(t)}\frac{g(t)}{f'(t)}\, df(t) \qquad (2.5)$$

при условии, что $g(b)=0$, $g(a)/f'(a)\in B$,
и интеграл, стоящий в левой части равенства, существует. Эта формула позволяет перенести известные результаты метода стационарной фазы на абстрактные функции.

Рассмотрим в качестве наиболее простой иллюстрации следующую очевидную лемму:

Лемма 6.7

Пусть $\varphi(x)$ - финитна и $\in C^\infty$, $f(x)\in C^\infty$, пусть $\Omega$ - носитель $\varphi(x)$ и $\operatorname{grad} f(x)\neq 0$ при $x\in\Omega$, тогда $I(h)=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int \exp\left[\frac{i}{h}f(x)\right]\varphi(x)\,dx = O(h^N)$, где $N$ - любое число.

Доказательство.

Очевидно, что

$$I(h) = \frac{h}{i}\int_\Omega \frac{1}{\partial f/\partial x_j}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{\frac{i}{h}f(x)}\right)\varphi(x)\,dx \qquad (2.6)$$

Тогда, интегрируя (2.6) по частям получим, что

$$I(h) = O(h).$$

Продолжая этот процесс, получим утверждение леммы.

Для абстрактных функций такая лемма может быть сформулирована следующим образом.

**Лемма 6.8**

Пусть $\varphi(x) \in C^{\infty}(B)$, $(x = x_1, \ldots, x_n)$ и финитна, $\Omega$ - носитель $\varphi(x)$, $f(x) \in C^{\infty}$ и $grad\, f(x) \neq 0$ при $x \in \Omega$, $iA$ - оператор порождающий ограниченную группу, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{iAf(x)} \varphi(x)\, dx \in D(A^N),$$

где $N$ - любое целое число.

Доказательство аналогично лемме 6.7 проводится с помощью формулы (2.5) интегрирования по частям.

## 2°. Одномерный случай. Разложение в асимптотический ряд.

В этом пункте мы будем рассматривать интеграл вида

$$\int_a^b e^{iAf(t)} g(t)\, dt, \qquad (2.7)$$

где $h(t) \in C^{\infty}$, а $g(t) \in C^{\infty}[B]$ - бесконечно дифференцируемая функция со значениями в банаховом пространстве $B$, $A$ - линейный неограниченный оператор порождающий группу, обладающий свойствами 1) - 3), перечисленными в предыдущем параграфе.

В частности, можно рассматривать $g(t)$ как

непрерывную функцию параметра $h$: $g(t)=g(t,h)$, такую, что все ее производные по $t$ ограничены при $0\le h\le 1$, а оператор $A$ как оператор умножения на $1/h$. В этом случае вся развитая теория будет совпадать с обычным общеизвестным методом стационарной фазы, изложенным, например, в книге Эрдейи "Асимптотические разложения" [ 90 ].

Мы будем опираться здесь на результаты предыдущего параграфа и на формулу интегрирования по частям (2.5)

Лемма 6.9

Пусть $f(t)\in C^\infty$, $f'(a)=0$, $f''(a)>0$, $f'(t)\neq 0$ при $a<t\le b$, а $g(t)$ - бесконечно дифференцируемая функция со значениями в $B$, обращающаяся в нуль вместе со всеми производными при $t=b$. Тогда в случае нечетного $m$ при всех $\alpha\geqslant 0$ имеет место соотношение

$$(A+i\alpha)^{\frac{m+1}{2}}\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{\frac{i(m+1)}{4}\pi}e^{iAf(a)}g(a)+$$

$$+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a)+(A+i\alpha)^{-1}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_2(a)+$$

$$+(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\psi_1(\xi)\,d\xi+X(a),\qquad(2.8)$$

где $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, - бесконечно - дифференцируемые функции $a$ со значениями в $B$, $\psi_1(\xi)$ - бес-

конечно дифференцируемая функция $\xi$ со значениями в $B$, обращающаяся в нуль со всеми производными в точке $b$.

$\chi(a) \in D(A^\infty)$ и бесконечно дифференцируема по $a$.

В случае четного $m$ при всех $\alpha \geq 0$ имеет место соотношение

$$(A+i\alpha)^{\frac{m+1}{2}} \int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}} e^{iAf(a)} g(a) +$$

$$+ (A+\alpha i)^{-1/2} e^{iAf(a)} \varphi_3(a) +$$

$$+ (A+i\alpha)^{-1/2} \int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \psi_2(\xi)\,d\xi + \chi_1(a), \quad (2.9)$$

где $\varphi_3(a)$, $\chi_1(a)$ - бесконечно дифференцируемые функции $a$ со значениями в $B$, $\psi_2(\xi)$ - бесконечно дифференцируемая функция $\xi$ со значениями в $B$, $\psi_2^{(n)}(b) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $\chi_1(a) \in D(A^\infty)$.

Доказательство.

Очевидно, что

$$I_m = \int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt = \int_a^b e^{i(A+\alpha i)f(t)}(t-a)^m e^{\alpha f(t)} g(t)\,dt$$

$$=\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}(t-a)^m g_1(t)\,dt =$$

$$=(i)^{[\frac{m}{2}]}(A+i\alpha)^{-[\frac{m}{2}]}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\left[\frac{d}{dt}\,\frac{1}{f'(t)}\right]^{[\frac{m}{2}]} g_2(t)\,dt \qquad (2.10)$$

где $g_2(t)=(t-a)^m\, e^{\alpha f(t)} g(t)$,

поскольку при $m>1$

$$\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\,\frac{g_1(t)(t-a)^m}{f'(t)}\,df(t)=i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\left(\frac{(t-a)^m g_1(t)}{f'(t)}\right)'dt$$

Обозначим

$$f_1(t)=\left(\frac{d}{dt}\,\frac{1}{f'(t)}\right)^{[\frac{m}{2}]}(t-a)^m g(t)\,e^{\alpha f(t)}.$$

Очевидно, что в случае, если $m$ четно, то $f_1(a)\neq 0$, а в случае нечетного $m$ $f_1(t)$ имеет нуль первого порядка в точке $t=a$. Предположим, что $m$ нечетно. Тогда, интегрируя $(2.10)$ один раз по частям, получим:

$$I_m=\left(\frac{i}{f''(a)}\right)^{\frac{m+1}{2}} c(m)(A+i\alpha)^{-\frac{m+1}{2}} e^{iAf(a)} g(a)+$$

$$+i^{\frac{m+1}{2}}(A+i\alpha)^{-\frac{m+1}{2}}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f'(t)}f_1(t)\right]dt, \qquad (2.11)$$

где $c(m)=(m-1)!!$ , поскольку

$$i\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}f_1(t)\,dt=(A+i\alpha)^{-1}\left\{e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{f_1(t)}{f'(t)}\right|_a^b -$$

$$-\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\left[\frac{d}{dt}\ \frac{f_1(t)}{f'(t)}\right]dt\Big\}$$

Очевидно, что равенство (2.II) можно переписать в виде:

$$\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}}(A+\alpha i)^{-\frac{m+1}{2}}\times$$

$$\times\, e^{iAf(a)}g(a) + i^{\frac{m+1}{2}}(A+i\alpha)^{-\frac{m+1}{2}}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{f_1(t)}{f'(t)}\right]dt \qquad (2.12)$$

Таким образом, задача сводится к изучению интеграла вида

$$I_0 = \int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)\in C^\infty[B]$, $\varphi(a)\neq 0$, $\varphi^{(k)}(b)=0$, $k=0,1,\ldots$

Имеем

$$I_0=\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,dt=$$

$$=e^{i(A+\alpha i)f(a)}\int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi(t(\xi))\frac{dt}{d\xi}\,d\xi =$$

$$= e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$

где $(\xi-a)^2 = f(t)-f(a)$.

Пусть

$$e(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi-a > \frac{b_1-a}{2} \\ 1 & \text{при } \xi-a \le \frac{b_1-a}{4} \end{cases} \text{ и } \in C^\infty$$

Имеем

$$I_0 = e^{i(A+i\alpha)f(a)} \int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} e(\xi)\varphi(a)\,d\xi +$$

$$+ e^{i(A+i\alpha)f(a)} \int_a^{b_1} e(\xi) e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} (\varphi_1(\xi)-\varphi(a))\,d\xi +$$

$$+ e^{i(A+i\alpha)f(a)} \int_a^{b_1} [1-e(\xi)]\, e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi_1(\xi)\,d\xi$$

В силу свойств $e(\xi)$ получаем:

$$\int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi(a) e(\xi)\,d\xi = \int_a^{\infty} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi(a) e(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_a^{\infty} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi(a)\,d\xi + \int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\, e^{i(A+di)(\xi-a)^2} \varphi(a)\,d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{i(A+i\alpha)\eta^2} \varphi(a)\,d\eta + \int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\, e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi(a)\,d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{A+i\alpha}} \varphi(a) +$$

$$+ \int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\; e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi(a)\,d\xi .$$

Отсюда

$$\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{A+i\alpha}}\,e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi(a) +$$

$$+ e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^\infty [e(\xi)-1]\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi(a)d\xi +$$

$$+ e^{i(A+i\alpha)f(a)}\Big[\int_a^{b_1} e(\xi)e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi +$$

$$+ \int_a^{b_1}[1-e(\xi)]\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi_1(\xi)\,d\xi\Big].$$

Заметим, что для любого $q \in B$ имеет место тождество:

$$\int_a^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}q(1-e(\xi))d\xi = \int_c^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}q(1-e(\xi))d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(A+i\alpha)}\int_c^\infty \frac{1-e(\xi)}{\xi-a}\,d e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}q =$$

$$= \frac{i}{2(A+i\alpha)}\int_c^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}q\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1-e(\xi)}{\xi-a}\right)d\xi =$$

$$= \left[\frac{i}{2(A+i\alpha)}\right]^N \int_c^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}q\left[\frac{d}{d\xi}\,\frac{1}{\xi-a}\right]^N(1-e(\xi))d\xi,$$

где $c = a + \frac{b_1-a}{4}$

Таким образом,

$$\int_a^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi(a)(1-e(\xi))d\xi \in D(A^\infty).$$

Кроме того, поскольку

$$\int_a^{b_1}[1-e(\xi)]e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi_1(\xi)d\xi=\int_c^{\infty}[1-e(\xi)]e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi_1(\xi)d\xi,$$

а последний интеграл в силу леммы 6.8. принадлежит

$$D(A^{\infty}),$$

то, следовательно,

$$\int_a^{b} e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{A+i\alpha}}\,e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi(a)+$$

$$+e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}e(\xi)\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi+\chi(a),$$

где $\chi(a)\in D(A^{\infty})$. и бесконечно дифференцируема по $a$.

Очевидно, что

$$\int_a^{b_1}e(\xi)\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi=\frac{i}{2}(A+i\alpha)^{-1}\varphi_1'(a)+$$

$$+i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{e(\xi)[\varphi_1(\xi)-\varphi_1(a)]}{2(\xi-a)}\right\}d\xi=$$

$$=\frac{i}{2}(A+i\alpha)^{-1}\varphi'(a)+$$

$$+i(A+i\alpha)\int_a^{b_1}e^{i(A+i\alpha)(\xi-a^2)}\frac{d\psi}{d\xi}\,d\xi,$$

где $\psi(\xi)=\dfrac{e(\xi)(\varphi_1(\xi)-\varphi_1(a))}{2(\xi-a)}$.

Отсюда

$$\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{A+i\alpha}}\,e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a) +$$

$$+\frac{i}{2}\,e^{i(A+i\alpha)f(a)}(A+i\alpha)^{-1}\varphi_1'(a) +$$

$$+ i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\frac{d\psi}{d\xi}\,d\xi, \qquad (2.13)$$

где $\psi(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция $\xi$ со значениями в $B$ и $\psi^{(k)}(b_1)=0$, $k=0,1,\dots$, $\psi(a)\neq 0$.

Подставив $I_0 = \int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,dt$ из (2.13)

в (2.12), получим

$$(A+i\alpha)^{\frac{m+1}{2}}\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\!\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}} \times$$

$$\times e^{iAf(a)}g(a) + (A+i\alpha)^{-1/2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a) +$$

$$+(A+i\alpha)^{-1}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_2(a) +$$

$$+(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\psi_1(\xi)\,d\xi + \chi(a), \qquad (2.14)$$

где $\varphi_1(a), \varphi_2(a), \chi(a)$ — бесконечно дифференцируемые функции $a$ со значениями в $B$,

$\chi(a)\in D(A^\infty)$, $\psi_1(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция $\xi$ со значениями в $B$.

Пусть теперь $m$ четно, тогда

$$\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m dt \doteq i^{\frac{m}{2}}(A+i\alpha)^{-\frac{m}{2}}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)} f_1(t)\,dt, \tag{2.15}$$

где $f_1(t)$ - бесконечно дифференцируемая функция $t$,

$$f_1(a) = \frac{c_1(m)\, g_1(a)}{[f''(a)]^{\frac{m}{2}}} \neq 0$$

Используя (2.13), получим

$$(A+i\alpha)^{\frac{m+1}{2}} \int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(i)^{\frac{m+1}{2}} e^{i(A+i\alpha)f(a)} \varphi_3(a) +$$

$$+(A+i\alpha)^{-1/2} e^{i(A+i\alpha)f(a)} \varphi_4(a) + (A+i\alpha)^{-1/2}\int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \psi_2(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \chi_1(a), \tag{2.16}$$

где
$$\varphi_3(a) = e^{\alpha f(a)} f_1(a)\sqrt{\frac{2}{f''(a)}},$$

$\psi_2(\xi)$ - бесконечно дифференцируемая функция $\xi$ со значениями в $B$, $\varphi_3(a), \varphi_4(a), \chi(a)$ - бесконечно дифференцируемые функции $a$ со значениями в $B$,

$$\chi_1(a) \in D(A^\infty).$$

Поскольку $f_1(a) = \dfrac{c_1(m)\, g(a)}{[f''(a)]^{\frac{m}{2}}}$, то в случае четного $m$ имеем:

$$(A+i\alpha)^{\frac{m+1}{2}}\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}}e^{iAf(a)}g(a)+$$

$$+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{iAf(a)}\varphi_4(a)+$$

$$+(A+i\alpha)^{-1/2}\int_a^{b_1}e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\psi_2(\xi)\,d\xi+X_1(a), \qquad (2.17)$$

где $\varphi_4(a)$ – бесконечно дифференцируемая функция $a$ со значениями в $B$, $\psi_2(\xi)$ – бесконечно дифференцируемая функция $\xi$ со значениями в $B$, обращающаяся в нуль со всеми производными в точке $\xi=b_1$,

$$X_1(a)\in D(A^\infty)$$

и бесконечно дифференцируемая. Лемма доказана.

Положим теперь в формулах (2.8), (2.9) $\alpha=0$ и применим эти же формулы к интегралам, стоящим в правых частях равенств (2.8), (2.9), но уже при $\alpha=\alpha_0>0$. К полученным интегралам вновь применяем формулы (2.8), (2.9) при $\alpha=\alpha_0$. Продолжая этот процесс, мы придем к асимптотическому разложению интеграла (2.7) по степеням оператора $(A+\alpha_0 i)^{-1/2}$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{-b}^{b}e^{iAf(t)}g(t)\,dt,$$

где $g^{(j)}(-b)=g^{(j)}(b)=0, \quad j=0,1,\dots,$

$f'(a)=0,\ f''(a)>0,\ f'(t)\neq 0$ при $t\neq a$.

Разбив этот интеграл на сумму двух: $\int_{-b}^{b}=\int_{-b}^{a}+\int_{a}^{b}$, мы к каждому из интегралов, стоящих в правой части, можем

применить лемму 6.9 и, следовательно, и асимптотическое разложение по степеням $(A+i\alpha_0)^{-1/2}$. Нетрудно видеть, что при этом останутся лишь четные степени этого оператора и мы получим окончательно

$$\sqrt{A}\int_{-b}^{b} e^{iAf(t)} g(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{(A+i\alpha_0)^j}\, e^{iAf(a)} g_j(a) + \mathcal{F}_{N+1}(a), \quad (2.18)$$

где $\mathcal{F}_{N+1}(a) \in D(A^{N+1})$ и $N+1$ раз дифференцируемая[*)] функция $a$ со значениями в $B$, а $g_j(a)$ — бесконечно дифференцируемая функция $a$ со значениями в $B$, причем

$$g_0(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(a)} g(a)$$

В случае, когда оператор $A^{-1}$ ограничен, можно положить $\alpha_0 = 0$.

$3^0$. Одномерный случай. Первый член разложения.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 6.10**

Пусть $g(t)$ — дифференцируемая $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ раз функция со значениями в банаховом пространстве $B$. Кроме того, предположим, что $g(t)$ и все ее производные обращаются в нуль в точке $t=a$, $g(0)\neq 0$.

Пусть $$\psi(k) = \int_0^a e^{ikf(t)} t^m g(t)\,dt \quad (2.19)$$

---

*) Т. е. её $N+1$ производная принадлежит $B$.

где $a > a_0$, $f(t) \in C^{[\frac{m}{2}]+3}_{[0,a]}$ –

функция со значениями во прямой, $f'(0) = 0$,

$f''(0) \neq 0$, $f'(t) \neq 0$ при $t \in (0, a]$.

Тогда функция $\psi(\kappa)$ при $\kappa \to \infty$ может быть представлена в виде:

$$\psi(\kappa) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left[\frac{m+1}{2}\right] e^{\frac{i(m+1)}{4}\pi \operatorname{sgn} f''(0)} \kappa^{-\frac{m+1}{2}} e^{i\kappa f(0)} g(0)(1+ \tag{2.20}$$

где $\|\sigma_\kappa\|_B \to 0$ при $\kappa \to \infty$

Доказательство.

Очевидно, что функция $f'(t)$ может быть представлена в виде

$$f'(t) = t\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) \in C^{[\frac{m}{2}]+1}_{[0,a]}$$

Проинтегрируем интеграл $(2.19)$ по частям $[\frac{m}{2}]$ раз:

$$\psi(\kappa) = \int_0^a e^{i\kappa f(t)} \frac{t^m g(t)}{f'(t)} df(t) = \frac{1}{i\kappa} \int_0^a \frac{t^m g(t)}{f'(t)} de^{i\kappa f(t)} =$$

$$= \frac{(-1)^{[\frac{m}{2}]}}{(i\kappa)^{[\frac{m}{2}]}} \int_0^a e^{i\kappa f(t)} \frac{1}{f'(t)} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)}\right]^{[\frac{m}{2}]} t^m g(t) df(t)$$

Функция

$$\psi(t) = \frac{1}{f'(t)} \left[ \frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)} \right]^{\left[\frac{m}{2}\right]} t^m g(t) \qquad (2.21)$$

со значениями в $B$ при четном $m$ имеет вид:

$$\psi(t) = \frac{C_1(m)\varphi_1(t)}{f'(t)} \qquad C_1(m) = (m-1)!!\,, \qquad (2.22)$$

где $\varphi_1(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, причем $\varphi_1(0) = \dfrac{g(0)}{[f''(0)]^{\left[\frac{m}{2}\right]}}$, и при чётном $m$ $\psi(t)$ имеет полюс первого порядка при $t=0$.

При нечётном $m$ функция $\psi(t)$ может быть представлена в виде

$$\psi(t) = \frac{C_1(m)\varphi_2(t)t}{f'(t)},$$

где $\varphi_2(t) \in C^1$,

причем $\varphi_2(0) = \dfrac{g(0)}{[f''(0)]^{\frac{m-1}{2}}}$, а

$$\psi(0) = \frac{C_1(m)g(0)}{[f''(0)]^{\frac{m+1}{2}}}$$

Следовательно, при нечётном $m$ $\psi(t) \in C^1$

При четном $m$, таким образом,

$$\psi(k) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(ik)^{\frac{m}{2}}} C_1(m) \int_0^a e^{ikf(t)} \varphi_1(t)dt \qquad (2.24)$$

При нечётном $m$ имеем

$$\psi(k)=\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{2}} e^{ikf(0)}\psi(0)+\left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{m+1}{2}}\int_0^a e^{ikf(t)}\psi'(t)\,dt=$$

$$=\left(\frac{i}{kf''(0)}\right)^{\frac{m+1}{2}} C_1(m)\, e^{ikf(0)} g(0)\,(1+\sigma_k)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)}k^{-\frac{m+1}{2}}e^{ikf(0)}g(0)(1+\sigma_k), \tag{2.25}$$

где $\|\sigma_k\|_B \to 0$ при $k\to\infty$.

При чётном $m$ имеем:

$$(k)^{\frac{m+1}{2}}\psi(k)=\sqrt{k}\int_0^a e^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,dt=I(k),$$

где $\varphi_3(t)=i^{\frac{m}{2}}C_1(m)\,\varphi_1(t)$.

Поскольку $f''(0)\neq 0$, то выберем $\alpha>0$ столь малым, что $f''(t)\neq 0$ при $t\in[0,\alpha]$

Разобьем $I(k)$ на сумму 3-х интегралов

$$I(k)=\sqrt{k}\int_0^{N/\sqrt{k}} e^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,dt+\sqrt{k}\int_\alpha^a e^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,dt+$$

$$+\sqrt{k}\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha} e^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,dt.$$

Оценим последний интеграл

$$\left|\sqrt{K}\int_{N/\sqrt{K}}^{\alpha} e^{iKf(t)}\varphi_3(t)\,dt\right| = \left|\frac{e^{iKf(t)}\varphi_3(t)}{\sqrt{K}\,f'(t)}\right|_{N/\sqrt{K}}^{\alpha} +$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{K}}\int_{N/\sqrt{K}}^{\alpha} e^{iKf(t)}\frac{d}{dt}\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\,dt\Big| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{K}}\frac{1}{f'(N/\sqrt{K})} + \frac{C_2}{\sqrt{K}} + \frac{1}{\sqrt{K}}\int_{N/\sqrt{K}}^{\alpha}\left|\frac{d}{dt}\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{N} + \frac{C_4}{\sqrt{K}},$$

поскольку

$$\int_{N/\sqrt{K}}^{\alpha}\left|\frac{d}{dt}\frac{\varphi_3}{f'}\right|dt \leqslant C\int_{N/\sqrt{K}}^{\alpha}\frac{1}{(f'(t))^2}\,dt \leqslant C_1\int_{N/\sqrt{K}}^{\alpha}\frac{|f''(t)|}{(f'(t))^2}\,dt =$$

$$= \frac{C_1}{|f'(t)|}\Bigg|_{N/\sqrt{K}}^{\alpha} \leqslant \frac{C_2\sqrt{K}}{N}.$$

Оценим предпоследний интеграл

$$\sqrt{K}\int_{\alpha}^{a} e^{iKf(t)}\varphi_3(t)\,dt = \frac{1}{i\sqrt{K}}\int_{\alpha}^{a}\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\,de^{iKf(t)} = O_{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$$

Таким образом, переходя последовательно к пределу при $K\to\infty$ и $N\to\infty$, получим

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{K\to\infty} K^{\frac{m+1}{2}}\psi(K)e^{-iKf(0)} = \lim_{N\to\infty}\lim_{K\to\infty}\int_0^N e^{iK[f(\frac{\xi}{\sqrt{K}})-f(0)]}\varphi_3\left(\frac{\xi}{\sqrt{K}}\right)d\xi =$$

$$= \varphi_3(0)\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{\frac{if''(0)\xi^2}{2}}\,d\xi =$$

$$= \varphi_3(0)\sqrt{\frac{2}{|f''(0)|}}\int_0^{\infty} e^{i\xi^2\operatorname{sgn} f''(0)}\,d\xi =$$

$$= \varphi_3(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}}\,e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)} = \frac{i^{\frac{m}{2}}C_1(m)g(0)}{[f''(0)]^{m/2}}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}}\,e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)}$$

Следовательно,

$$\psi(K)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{\frac{m+1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{\frac{i(m+1)\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)}K^{-\frac{m+1}{2}}e^{iKf(0)}g(0)\cdot(1+\sigma_K),$$

где $\|\sigma_K\|_B\to 0$ при $K\to\infty$, что и требовалось.

Замечание I.

Из предыдущих оценок следует, что если выполнены все условия предыдущей леммы, за исключением $f''(0)=0$, т.е. если $f''(0)=0$, то $\lim\limits_{K\to\infty}|\psi(K)|K^{\frac{m+1}{2}}=\infty$.

$4^{\circ}$. Многомерный случай.

Пусть теперь $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$, $g(x)=g(x_1,\dots,x_n)$ – дифференцируемая $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ раз функция со значениями в банаховом пространстве $B$, обращающаяся в нуль на границе области $\Omega_0=\{|x_i-x_i^0|\le\delta,\ j=1,\dots,n\}$ вместе со всеми производными, $x=x_0$ – единственная стационарная точка функции $f(x)$, т.е.

$$\operatorname{grad} f(x_0)=0.$$

Пусть далее

$$\psi(K)=\int\limits_{\Omega_0}e^{iKf(x)}g(x)\,dx,$$

матрица $R=\left\|\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|_{i,j=1}^{n}$ невырождена и индефинитна, $f(x)\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+4}(\Omega_0)$

Лемма 6.11

При высказанных предположениях справедливо равенство

$$\psi(K,x_0)=\frac{e^{\frac{i\pi}{4}\delta}(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{|J|}}e^{iKf(x_0)}g(x_0)(1+\sigma_K),\quad(2.26)$$

где $\delta$ - сигнатура квадратичной формы с матрицей $R$ , $\mathcal{J} = \det R$, $\|\sigma_\kappa\|_B \to 0$ при $\kappa \to \infty$

Доказательство.

Очевидно, что

$$\psi(\kappa) = \int_{-\delta}^{\delta} \dots \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\kappa f(x_0+\eta)} g(x_0+\eta)\, d\eta \qquad \eta = x - x_0 \qquad (2.27)$$

При малых $\eta$

$$f(x_0+\eta) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, \eta_i \eta_j + \dots \qquad (2.28)$$

Сделаем замену переменных: $\xi_i = \xi_i(\eta)$, $i = 1, \dots, n$, приводящую квадратичную форму

$$Q(\eta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \eta_i \eta_j$$

к каноническому виду

$$Q(\eta) = \tilde{Q}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2$$

Отсюда следует, что при малых $\xi$

$$f(\eta + x_0) = f_1(\xi) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 + \dots \qquad (2.29)$$

Поскольку $\frac{D\xi}{D\eta} = 1$ , то

$$\psi(\kappa) = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \dots \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{i\kappa f_1(\xi)} g_1(\xi)\, d\xi \qquad (2.30)$$

$$g_1(\xi) = g(\eta(\xi) + x_0)$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n < 0$

Положим $y_j = |\lambda_j|^{1/2} \xi_j$, обозначим через $f_2(y)$, $g_2(y)$ функции

$$f_2(y) = f_1(\xi(y)) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{n} y_j^2 + \cdots$$

$$g_2(y) = g_1(\xi) = g_1\left(\frac{y_1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \ldots, \frac{y_n}{\sqrt{|\lambda_n|}}\right)$$

Поскольку

$$dy = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{1/2} d\xi_i, \quad \text{то}$$

$$\psi(\kappa, x_0) = \frac{e^{i\kappa f(x_0)}}{\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{1/2}} \int_{-\delta_1'}^{\delta_1'} \ldots \int_{-\delta_n'}^{\delta_n'} e^{i\kappa f_2(y)} g_2(y) dy = \frac{e^{i\kappa f(x_0)}}{\sqrt{|J|}} I(\kappa) \tag{2.31}$$

$$J = \det R = \det \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j \le n}$$

Перейдем к биполярным координатам

$$y_i = r Q_i(\alpha), \qquad y_j = \rho Q_j(\beta)$$

$$i = 1, \ldots, p \qquad\qquad j = p+1, \ldots, n$$

Полагая $g_2(y) = g_3(r, \rho, \alpha, \beta)$, $f_2(y) = f_3(r, \rho, \alpha, \beta)$, получим

$$I(\kappa)=\iint d\Omega_1\, d\Omega_2 \int_0^a\int_0^b e^{i\kappa f_3(\tau,\rho,\alpha,\beta)} g_3(\tau,\rho,\alpha,\beta)\,\tau^{p-1}\rho^{n-p-1}\,d\rho\, d\tau, \tag{2.32}$$

где
$$f_3(\tau,\rho,\alpha,\beta)=\frac{\tau^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}+\dots$$

Очевидно, что $f_3(\tau,\rho,\alpha,\beta)$ имеет столько же непрерывных производных по своим аргументам, сколько $f(t)$. Имеем (угловые переменные опускаем):

$$f_3(\tau,\rho)=f_3(\tau,\rho)-f_3(\tau,0)+f_3(\tau,0)$$

$$f_3(\tau,0)=\tau^2 f_4(\tau)$$

$$f_3(\tau,\rho)-f_3(\tau,0)=\rho\,\frac{\partial f_3(\tau,0)}{\partial\rho}-\rho^2 f_5(\tau,\rho)$$

$$\rho\,\frac{\partial f_3(\tau,0)}{\partial\rho}=\rho\tau^2 f_6(\tau)$$

Окончательно,

$$f_3(\tau,\rho)=\tau^2[f_4(\tau)+\rho f_6(\tau)]-\rho^2 f_5(\tau,\rho)$$

Полагая $\xi_1^2=\tau^2[f_4(\tau)+\rho f_6(\tau)]$,

$\xi_2^2=\rho^2 f_5(\tau,\rho)$, $\xi_j=\alpha_j$, $j=3,\dots,p+1$

$\xi_{p+1+i}=\beta_i$, $i=1,\dots,n-p-1$, получим

$$I(\kappa)=\iint d\Omega_1\, d\Omega_2 \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} e^{i\kappa[\xi_1^2-\xi_2^2]}\xi_1^{p-1}\xi_2^{n-p-1} g_4(\xi)\,d\xi_1\, d\xi_2 \tag{2.33}$$

$$g_4(\xi)=g_3[\tau(\xi),\rho(\xi),\xi_3,\dots,\xi_n]\,\frac{D(\tau,\rho)}{D(\xi_1,\ \xi_2)}\left[f_4+\rho f_6\right]^{-\frac{\rho-1}{2}}(f_5)^{-\frac{n+\rho+1}{2}}$$

Обозначим через $f(\tau,\rho)$ и $\varphi(\tau,\rho)$ функции вида

$$f(\tau,\rho)=\tau^2(f_4(\tau)+\rho f_6(\tau))$$

$$\varphi(\tau,\rho)=\rho^2 f_5(\tau,\rho)$$

Поскольку

$$\frac{d\xi_1}{d\tau}=\frac{f'_\tau}{2\sqrt{f}},\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial\tau}=\frac{\varphi'_\tau}{2\sqrt{\varphi}}$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho}=\frac{f'_\rho}{2\sqrt{f}},\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho}=\frac{\varphi'_\rho}{2\sqrt{\varphi}}\quad и\quad \frac{D(\tau,\rho)}{D(\xi_1,\xi_2)}$$

отличен от нуля при малых $\xi_1$ и $\xi_2$, то функция

$$\psi(\xi_1,\xi_2)=\frac{D(\tau,\rho)}{D(\xi_1,\xi_2)}=\left(\frac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(\tau,\rho)}\right)^{-1}$$ является $\left[\frac{n}{2}\right]+2$

раз дифференцируема. Следовательно,

$$g_4(\xi)\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

Рассмотрим

$$I_1(\kappa)=\int_0^{a_1}\int_0^{b_1}e^{i\kappa(\xi_1^2-\xi_2^2)}\xi_1^{\rho-1}\xi_2^{n-\rho-1}g_4(\xi)\,d\xi_1 d\xi_2$$

Поскольку $g_4(\xi)$ при $\xi_1=a_1$ и $\xi_2=b_1$

обращается в нуль вместе со всеми производными, то, интегрируя по частям, получим:

$$I_1(\kappa)=\left(\frac{i}{2\kappa}\right)^{q}(-1)^{-\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\int_0^{a_1}d\xi_1\int_0^{b_1}e^{i\kappa(\xi_1^2-\xi_2^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\xi_2^{n-p-1}g_4\,d\xi_2 \tag{2.34}$$

где $q=\left[\frac{p-1}{2}\right]+\left[\frac{n-p-1}{2}\right]$, функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\xi_2^{n-p-1}g_4(\xi)$$

имеет нуль в точке $\xi_1=\xi_2=0$ не выше первого порядка. Оценим интеграл вида

$$I_2(\kappa,\xi_2)=\int_0^{b_1}e^{-i\kappa\xi_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\xi_2^{n-p-1}g_4(\xi)\,d\xi_2 \tag{2.35}$$

При этом возможны 2 случая: либо $n-p-1$ чётно, либо $n-p-1$ нечётно. Пусть $n-p-1$ чётно, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\frac{n-p-1}{2}}\xi_2^{n-p-1}g_4(\xi)=$$

$$=(n-p-2)!!\,\varphi(\xi_1,\xi_2)=C_1(n,p)\,\varphi(\xi_1,\xi_2).$$

Функция $\varphi(\xi_1,\xi_2)\in C^2_{[0,b_1]}$,

$$\varphi(\xi_1, 0, \xi_3, \dots, \xi_n) = \varphi(\xi_1, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \xi_1^{\,p-1} g_1(\xi_1, 0, \xi_3, \dots, \xi_n)$$

Следовательно,

$$I_2(\kappa, \xi_1) = C_1(n, p) \int_0^{b_1} e^{-i\kappa \xi_2^2} \varphi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

В силу лемм 6.7, 6.10 имеем

$$I_2(\kappa, \xi_1) = \frac{1}{2} \frac{C_1(n,p)}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} \varphi(\xi_1, 0) +$$

$$+ C_1(n,p) \int_0^{b_1} e^{-i\kappa \xi_2^2} e(\xi_2)\, \xi_2\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 + O\left(\frac{1}{\kappa^\infty}\right),$$

где

$$e(\xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi \leq \frac{b_1}{4} \\ 0 & \text{при} \quad \xi \geq \frac{b_1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \in C^\infty,$$

$$\xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, 0)$$

Оценим

$$I_3(\kappa, \xi_1) = \int_0^{b_1} e^{-i\kappa \xi_2^2} e(\xi_2)\, \xi_2\, \psi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$I_3(\kappa, \xi_1) = -\frac{i}{2\kappa} \psi(\xi_1, 0) - \frac{i}{2\kappa} \int_0^{b_1} e^{-i\kappa \xi_2^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(e(\xi_2) \psi(\xi_1, \xi_2)\right) d\xi_2$$

Следовательно,

$$I_2(\kappa,\xi_1) = \frac{C_1(n,p)}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{\,p-1} g_1(\xi_1,0) +$$

$$+ C_2(n,p)\,\frac{\psi(\xi_1,0)}{\kappa} + \frac{C}{\kappa}\int_0^{b_1} e^{-i\kappa\xi_2^2}\psi_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 + O\left(\frac{1}{\kappa^\infty}\right)$$

Отсюда

$$I_1(\kappa) = \left(\frac{i}{2\kappa}\right)^q (-1)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\frac{C_1(n,p)}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\int_0^{a_1} e^{i\kappa\xi_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{\,p-1} g_1(\xi_1,0)\,d\xi_1 +$$

$$+ \frac{C_2(n,p)}{\kappa^{q+1}}\int_0^{a_1} e^{i\kappa\xi_1^2}\psi(\xi_1,0)\,d\xi_1 + \frac{C_3(n,p)}{\kappa^{q+1}}\int_0^{a_1}\int_0^{b_1} e^{i\kappa(\xi_1^2-\xi_2^2)}\psi_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$

Оценим

$$I_3(\kappa) = \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} e^{i\kappa(\xi_1^2-\xi_2^2)}\psi_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$

Имеем

$$I_3(\kappa) = \int_0^{a_1} e^{i\kappa\xi_1^2}\psi_1(\xi_1,\xi_2^*)\,d\xi_1\int_0^{b_1} e^{-i\kappa\xi_2^2}\,d\xi_2 =$$

$$= \int_0^{a_1} e^{i\kappa\xi_1^2}\psi_1(\xi_1,\xi_2^*)\,d\xi_1\,\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\int_0^{b_1\sqrt{\kappa}} e^{-z^2}\,dz = O\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right),$$

где интегрирование по $z$ – вдоль луча

$$\arg z = -\frac{\pi}{4}$$

Оценим интеграл

$$I_4(k)=\int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\ \frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{p-1}g_4(\xi_1,0)d\xi_1$$

Пусть $p-1$ чётно, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\ \frac{1}{\xi_1}\right)^{\frac{p-1}{2}}\xi_1^{p-1}g_4(\xi_1,0)=C_4(p)\varphi(\xi_1),$$

где $C_4(p)=(p-2)!!\ ,\quad \varphi(\xi_1)\in C^2,\quad \varphi_2(0)=g_4(0)$

Следовательно, в силу леммы 6.I0

$$I_4(k)=C_4(p)\int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2}\varphi(\xi_1)d\xi_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{\frac{i\pi}{4}}g_4(0,0)(1+\sigma_k) \tag{2.36}$$

Очевидно, что

$$\int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2}\psi(\xi_1,0)d\xi_1=\sigma_k \tag{2.37}$$

Из (2.36) и (2.37) следует, что

$$I_1(k)=\left(\frac{i}{2k}\right)^q\frac{(-1)^{-\frac{n-p-1}{2}}}{k}C_1(n,p)\,C_4(p)\,g_4(0,0)(1+\sigma_k)$$

Поскольку

$$\sqrt{\pi}\ C_1(n,p)=\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)2^{\frac{n-p-1}{2}};\quad \sqrt{\pi}\,C_4(p)=\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)2^{\frac{p-1}{2}}$$

$$g_4(0,0)=g(x_0)\,2^{n/2}\qquad i^q(-1)^{-\frac{n-p-1}{2}}=e^{\frac{i\pi}{4}\delta},\quad \delta -$$



25–1419

сигнатура квадратичной формы с матрицей

$$R = \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \, \partial x_j} \right\| \qquad \text{, то}$$

$$I_1(\kappa) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\delta} \, 2^{\frac{n}{2}}}{\kappa^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) g(x_0) \, (1+\sigma_\kappa)$$

Отсюда и из того, что

$$\iint d\Omega_1 \, d\Omega_2 = (\pi)^{\frac{n}{2}} \, \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right),$$

следует:

$$I(\kappa) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\delta} (2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\kappa^{\frac{n}{2}} \sqrt{|J|}} \, g(x_0) \, e^{i\kappa f(x_0)} (1+\sigma_\kappa),$$

где $\|\sigma_\kappa\|_B \to 0$

при $\kappa \to \infty$.

Все остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Аналогично, опираясь на лемму 6.9 можно получить асимптотическое разложение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{\infty}^{\infty} e^{iAf(x)} g(x) \, dx \qquad x = x_1, \ldots, x_n, \qquad (238)$$

где $f(x) \in C^\infty$, $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, $g(x) \in C^\infty(B)$

и финитна, оператор $A$ удовлетворяет условиям 1) - 3).

Именно справедлива

Лемма 6.12 При высказанных предположениях имеет место разложение

$$A^{n/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!..\!\!\int e^{iAf(x)}g(x)\,dx = e^{if(x_0)A}\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{(A+i\alpha)^j}g_j(x_0)+$$

$$+\mathcal{F}_{N+1}(x_0) \qquad x = x_1,\dots,x_n, \tag{2.39}$$

где $g_j(x_0)$, $j \le N$ –

бесконечно дифференцируемые функции $x_0$ со значениями в $B$, $\mathcal{F}_{N+1}(x_0) \in \mathcal{D}(A^{N+1})$ и $N+1$ раз дифференцируема в $B$, а

$$g_0(x) = g(x_0)\,\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|\mathcal{I}|}}$$

Заметим, что здесь, так же как и в одномерном случае (2.18), разложение ведется по целым степеням резольвенты $(A+i\alpha)^{-j}$. Нетрудно убедиться, что члены, содержащие $\frac{1}{A+i\alpha}$ в полуцелых степенях, обращаются в нуль вследствие интегрирования по угловым координатам в представлении (2.33), точно так же, как это имеет место и для асимптотического разложения по методу стационарной фазы для обычных функций [см. [79 1),2)] ].

Аналогичная формула имеет место и для оператора A, удовлетворяющего условиям 1), 2а), 3) § 1. При этом функции $g_j(x_0)$ в формуле (2.39) будут комплексно сопряжены соответствующим функциям получаемым при асимптотических разложениях интеграла (2.38) с "положительным" оператором $A$, удовлетворяющим условиям 1), 2),

3) $\S 1$ и вместо $A^{n/2}$ нужно взять $|A|^{n/2}$, т.е $(-A)^{n/2}$

Очевидно, что асимптотическое разложение можно получить в случае, когда $A$
не удовлетворяет условию 2 или 2а) и 3), но
можно разложить $g(t)$ на сумму $g_+(t)$ и $g_-(t)$:

$$g_+(t) \in B_+ \subset B, \quad g_-(t) \in B_- \subset B,$$

причем сужение оператора $A$ на $B_+$ удовлетворяет условиям 2) и 3), а сужение оператора $A$ на $B_-$ удовлетворяет условиям 2а) и 3). Кроме того, разложение можно применить также в случае, когда $g(t)$ есть обобщенная функция в смысле п.8° $\S 1$ гл. 1. Для этого достаточно подействовать на обе части равенства (2.39) оператором $A^\ell$, где $\ell$ - любое целое положительное число и учесть, что

$$A^\ell D(A^m) = D(A^{m-\ell})$$

Пример.

Пусть $B = L_2[-\infty, \infty]$ - гильбертово пространство функций от $\tau$, $-\infty \le \tau \le \infty$, $A = i\frac{\partial}{\partial\tau}$, $g(t,\tau) = g_0(t)\delta(\tau)$ (см. гл.2, §1, п.8°), $g_0(t) \in C^\infty$.

Тогда

$$g_0(t)\delta_+(\tau) \in B_+, \quad \text{а} \quad g_0(t)\delta_+^*(\tau) \in B.$$

Пусть $f(t) \in C^\infty$, $\operatorname{grad} f(t) = 0$ лишь при $t=0$

Имеем

$$e^{iAf(t)} g_0(t)\delta(\tau) = g_0(t)\delta(\tau - f(t))$$

Таким образом,

при $n$ — чётном имеем

$$\int\limits_{-a}^{a}\ldots\int\limits_{-a}^{a} g_0(t)\,\delta^{(\frac{n}{2})}(\tau-f(t))\,dt=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}g_0(0)}{\sqrt{|J|}}\Big\{e^{\frac{i\pi\delta}{4}}\delta_+[\tau-f(0)]+$$

$$+e^{-\frac{i\pi\delta}{4}}\delta_+^{*}[\tau-f(0)]\Big\}+\mathcal{F}(\tau)=\frac{2(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|J|}}\,g_0(0)\,\mathrm{Re}\Big\{e^{\frac{i\pi\delta}{4}}\delta_+[\tau-f(0)]\Big\}+$$

$$+\mathcal{F}(\tau),$$

где $\mathcal{F}(\tau)$ — ограничена, $\delta$ и $J$ определены выше.

Заметим, наконец, что в многомерном случае имеет место утверждение аналогичное замечанию к лемме 6.10. Это эквивалент следующему утверждению. Пусть $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, k^{n/2} I(k) < \infty$ для любой финитной функции $g(x)$, тогда $\det\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|$ отличен от нуля в стационарной точке и метод стационарной фазы применим.

## § 3. Асимптотика в малом решений абстрактных уравнений x/.

### I°. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами.

1. Пусть дана последовательность вложенных друг в друга банаховых пространств: $B^{\nu+1} \subseteq B^{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, которая определяет линейное пространство $B^{\infty}$ со счетным числом норм вида $\| \quad \|_{B_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим оператор

$$L = \sum_{i=0}^{m} L_i (p_1, \ldots, p_n, x_1, \ , x_{n+1}, h) \, p_{n+1}^{i}, \quad (x_{n+1} = t)$$

зависящий от $2n+2$ параметров и отображающий счетно-нормированное пространство $B^{\infty}$ в себя. Предположим, что оператор $L$ бесконечно дифференцируем по всем параметрам, т.е. все его частные производные отображают $B^{\infty}$ в себя.

---

x/ Идейная сторона метода более выпукло отражена автором в послесловии к книге Хединга / 51, 14) /. Здесь более подробно проводятся выкладки, и результаты даются в более общей форме.

Теперь рассмотрим счетно-нормированное пространство $R_h$ функций $x_1, \dots, x_{n+1}, h$ со значениями в $B^\infty$. Пространство $R_h$ определяется счетным множеством норм вида

$$\underset{0\le x_{n+1}\le T}{Max}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\|\prod_{\nu,m}\Big(ih\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big)^{\ell_\nu} x_m^{\ell_m} f(x_1,\dots,x_{n+1},h)\Big\|_{B^\kappa}^2 dx_1\dots dx_n \le const$$

$$0\le h\le 1,\quad \sum \ell_\kappa = \kappa \qquad 1\le \nu,\ m\le n+1$$

Пусть $V_h$ – некоторое счетно-нормированное пространство, объемлющее $R_h : V_h \supseteq R_h$.

Обозначим через $R_h^\circ$ подпространство $R_h$ функций, не зависящих от $x_{n+1}$.

Замечание. В этой главе мы будем проводить доказательства для случая, когда пространства $B^i$ $i=1,\dots,\infty$ гильбертовы, используя тот факт, справедливый лишь в этом случае, что $\Phi_{1/h}^{p_n} R_h \subset R_h$. Если же пространства $B^i$ банаховы, то мы можем утверждать лишь, что $h^{n/2}\,\Phi_{1/h}^{p_n} R_h \subset R_h$.

Это обстоятельство не влияет на ход доказательства, приводимых здесь теорем, но сказывается на оценке, которая понадобится при доказательстве теоремы 4.4.

В пространстве $R_h$ рассмотрим оператор

$$\hat{L}_1 = \sum_{j=0}^{m}\hat{L}_j\Big(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},x_1,\dots,x_{n+1},h\Big)\Big(ih\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\Big)^j,$$

причем операторы $-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n}$

действуют первыми, т.е. x/

$$\hat{L}_j(\hat{p},x,t,h)\varphi(x)=\hat{L}_j\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},x_1,\dots,x_{n+1},h\right)\varphi(x)=$$

$$=\Phi^{p_1\dots p_n}L(p,x,t,h)\,\Phi^{\xi_1\quad\xi_n}\varphi(\xi)$$

Пусть сужение $\tilde{\hat{L}}$ оператора $\hat{L}$, определенное на множестве элементов из $R_h$, обращающихся в нуль при $x_{n+1}=0$ вместе со своими $m-1$ производными по $x_{n+1}$ имеет обратный $\tilde{\hat{L}}^{-1}$.

Предположим, что выполнены следующие 2 условия.

I) $$h^{\tau}\tilde{\hat{L}}^{-1}R_h\subseteq V_h$$

2) Существует единственное решение уравнения

$$\hat{L}\psi=0\quad,\tag{3.0}$$

удовлетворяющее при $x_{n+1}=t_0$ условиям

$$\frac{\partial^j\psi}{\partial t^j}\in R_h^{\circ}\qquad j=0,\dots,m-1\qquad t=x_{n+1}$$

при $t_0\le x_{n+1}\le T$, такое, что

$$h^{\tau}\psi\in V_h\qquad\qquad T>t_0\geqslant 0$$

Очевидно, что если выполнены условия теоремы 4.I, то выполнены и условия I)2). Это следует из леммы 5.2

---

x/ Здесь $\Phi^{p_1,\dots,p_k}=\Phi_A^{p_k}$ при $A=\frac{1}{h}$ (см.гл. 2 § 2), т.е.

$$\Phi^{p_1,\dots,p_k}\varphi(p)=(-2\pi ih)^{-k/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ipx}{h}}\varphi(p)\,dp$$

$$\Phi^{\xi_1\dots\xi_k}=\Phi_A^{\xi_k}\quad\text{при}\quad A=\frac{1}{h},\ \text{т.е.}$$

$$\Phi^{\xi_1\dots\xi_k}\varphi(\xi)=(2\pi ih)^{-k/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ip\xi}{h}}\varphi(\xi)\,d\xi$$

2. Пусть

$$\psi(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1},h)=\varphi(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},x_{n+1},h)\,e^{\frac{i}{h}S(p,x)}$$

где $S(p,x)=S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1})\in C^\infty$, а

$$\varphi(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1},h)\ -$$

-бесконечно дифференцируемая ограниченная функция при

$$0\le h\le 1,\qquad 0\le x_{n+1}\le T$$

и финитная функция аргументов $p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n$ со значениями в счетно-нормированном пространстве $B^\infty$. Для упрощения формул обозначим $p_{k+1},\dots,p_{n+1}$ через $\xi_{k+1},\dots,\xi_{n+1}$, а $x_1,\dots,x_k$ через $\eta_1,\dots,\eta_k$, соответственно, $\hat p_i=\hat\xi_i$ при $i>k$.

Теперь мы можем обозначить

$$\psi(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1},h)=\psi(p,x,h)$$

$$\hat L=\hat L(\eta,x,\hat p,\hat\xi,h)=\hat L\left(\eta_1,\dots,\eta_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1},-ih\frac{\partial}{\partial\eta_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial\eta_k},-ih\frac{\partial}{\partial x},h\right)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x_{k+1}},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}$

## 2°. Асимптотическое разложение линейного дифференциального оператора с частными производными и операторными коэффициентами.

### Лемма 6.13

Имеет место следующее соотношение

$$\hat L(\eta,x,\hat p,\hat\xi,h)\,\Phi^{p_1\dots p_k}\psi(p,x,h)=\Phi^{p_1\dots p_k}e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\Big\{L(\eta^0,x,p,\xi^0,0)\varphi+$$
$$+ih\Big[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L^0}{\partial\eta_j^0}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}-\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial L}{\partial\xi_j^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}-\frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\eta_i^0\partial\eta_j^0}+$$
$$+\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\xi_i^0\partial\xi_j^0}-2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\eta_i^0\partial\xi_j^0}-2\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\eta_i^0\partial p_i}\Big)\varphi$$
$$-i\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}\varphi\Big]+\sum_{i=2}^{N}h^iP_i\left(p,\frac{\partial}{\partial p},x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\Big\}+h^{N+1}z_h(\eta,x,h)\tag{3.1}$$

где $\eta_i^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i}$, $i=1,\dots,k$; $\xi_j^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j}$, $j=k+1,\dots,n+1$,

$P_i(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p})$ – полиномы $2i$-того порядка

по $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial p}$, $z_h(\eta, x, h) \in R_h$, $L^0 = L(\eta^0, x, p, \xi^0, h)\big|_{h=0}$

Доказательство:

Обозначим через $\tilde{L}_j = \tilde{L}_j(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h)$

оператор, действующий следующим образом

$$\tilde{L}_j \psi = \tilde{L}_j\left(ih\frac{\partial}{\partial p_1},\dots,ih\frac{\partial}{\partial p_k}, x_{k+1},\dots,x_{n+1}, p_1, p_k, -ih\frac{\partial}{\partial x_{k+1}},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n}, h\right)\psi(p,x,h)$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=k+1}^{n} d\xi_j \prod_{i=1}^{k} d\eta_i\, e^{\frac{i}{h}\left(\sum_{j=k+1}^{n}\xi_j x_j - \sum_{i=1}^{k}\eta_i p_i\right)} \times$$

$$\times\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}\left(\sum_{j=1}^{k}\eta_j p_j' - \sum_{j=k+1}^{n}\xi_j x_j'\right)} L_j(\eta_1,\dots,\eta_k, x_{k+1},\dots,x_n, p_1',\dots,p_k', \xi_{k+1},\dots,\xi_n, h)$$

$$\psi(p', x', h)\prod_{j=k+1}^{n} dx_j' \prod_{i=1}^{k} dp_i'\Big]$$

Очевидно, что $\tilde{L} = \sum_{j=0}^{m} \tilde{L}_j\, \hat{\xi}_{n+1}^{\,j} = \Phi^{x_1\dots x_k} L\, \Phi^{p_1\dots p_k}$

Рассмотрим пространство $C^\infty[R^{n+2}, B^\infty]$

функций от $p_1,\dots,p_k, x_{k+1},\dots,x_{n+1}, h$, $0 \le h \le 1$

$0 \le x_{n+1} \le a$, $0 \le |p| \le \infty$, $0 \le |x| \le \infty$

со значениями в $B^\infty$ и пространство

$C_\delta^\infty[R^{n+2}, B^\infty]$ функций тех же аргументов в области

$0 \le h \le 1$, $-\infty \le x_{n+1} \le \infty$, $0 \le |p| \le \infty$

$0 \le |x| \le \infty$ со значениями в $B^\infty$ обращающихся в нуль вне интервала $-\delta \le x_{n+1} \le a+\delta$

Пусть $\varphi \in C^\infty[R^{n+2}, B^\infty]$, а $\varphi_\delta \in C_\delta^\infty[R^{n+2}, B^\infty]$ и $\varphi_\delta = \varphi$

при $0 \le x_{n+1} \le a$. Положим

$$\psi = \varphi(p, x, h)\, e^{\frac{i}{h} S(p, x)} \qquad p = p_1, \dots, p_k, \quad x = x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$$

Очевидно, что $\tilde{L}\psi_\delta = \tilde{L}\psi$

при $0 \le x_{n+1} \le a$ и функция $\tilde{L}\psi_\delta$

может быть представлена интегралом вида

$$\tilde{L}\psi_\delta = I(x, p, h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \prod_{j=k+1}^{n+1} d\xi_j \prod_{i=1}^{k} d\eta_i \; e^{\frac{i}{h}\left(\sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j - \sum_{i=1}^{k} \eta_i p_i\right)} \times$$

$$\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{\frac{i}{h}\left[\sum_{j=1}^{k} \eta_j p_j' - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j'\right]} \tilde{L}(\eta, x, p', \xi, h)\, \varphi_\delta(p', x', h)\, e^{\frac{i}{h} S(p', x')} \prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' \prod_{i=1}^{k} dp_i' \right]$$

Обозначим через $I_1(\eta, x, \xi, h)$ интеграл вида

$$I_1(\eta, x, \xi, h) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{\frac{i}{h}\left[\sum_{j=1}^{k} \eta_j p_j' - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j'\right]} \cdot L(\eta, x, p', \xi, h)\, e^{\frac{i}{h} S(p', x')}\, \varphi_\delta(p', x', h) \prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' \prod_{i=1}^{k} dp_i' \tag{3.2}$$

Пусть $\Omega$ - носитель функции $\varphi_\delta(p', x', h)$

Обозначим

$$\Omega_{\xi_j^\circ} = \frac{\partial S}{\partial x_j'}(\Omega), \qquad \Omega_{\eta_i^\circ} = -\frac{\partial S}{\partial p_i'}(\Omega)$$

$$j = k+1, \dots, n+1, \qquad i = 1, \dots, k$$

Возьмем финитную функцию $\Phi(\eta, \xi)$, носитель которой содержит область $\Omega_0 = \prod_{i,j} \Omega_{\eta_i^\circ} \times \Omega_{\xi_j^\circ}$, причем $\Phi(\eta, \xi) = 1$ при $\eta, \xi \in \Omega_0$

Рассмотрим интеграл

$$I_2(x,p,h)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\!\int \prod_{j=k+1}^{n+1} d\xi_j \prod_{i=1}^{k} d\eta_i \,(1-\Phi(\eta,\xi))\, e^{\frac{i}{h}\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n+1}\xi_j x_j-\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j p_j\right)} \times$$

$$\times\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\!\int e^{\frac{i}{h}\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j p_j'}\, e^{-\frac{i}{h}\sum\limits_{j=k+1}^{n+1}\xi_j x_j'} L(\eta,x,p',\xi,h)\, e^{\frac{i}{h}S(p',x')} \times$$

$$\times\, \varphi_\sigma(p',x',h)\prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' \prod_{j=1}^{k} dp_j'\Big]$$

Из определения $\Phi(\eta,\xi)$ следует, что $I_2(x,p,h)$ отличен от нуля лишь при $\eta,\xi \bar{\in} \Omega_0$, т.е. при $\xi \neq \operatorname{grad}_{x'} S(p',x')$, $\eta\neq -\operatorname{grad}_{p'} S(p',x')$

Но если $\eta,\xi \bar{\in}\Omega_0$, то $I_1(\eta,x,\xi,h)$ не имеет стационарных точек. В силу леммы 6.7

$$I(x,p,h)=I_3(x,p,h)+O(h^N),$$

где

$$I_3(x,p,h)=\frac{1}{(2\pi h)^{n+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\!\int \Phi(\eta,\xi)\, e^{\frac{i}{h}\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n+1}\xi_j x_j-\sum\limits_{i=1}^{k}\eta_i p_i\right)} L(\eta,x,p',\xi,h)\times$$

$$\times\, e^{\frac{i}{h}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\eta_j p_j'-\sum\limits_{j=k+1}^{n+1}\xi_j x_j'\right)} \varphi_\sigma(p',x',h)\, e^{\frac{i}{h}S(p',x')}\prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' d\xi_j \prod_{i=1}^{k} dp_i' d\eta_i \qquad (3.3)$$

$N$ – любое целое число

Для вычисления $I_3(x,p,h)$ применяем метод стационарной фазы. Стационарными точками $\xi_j^0, x_j'^0, p_i', \eta_i^0$, $j=k+1,\dots,n+1$, $i=1,\dots,k$ являются решения системы:

$$x_j'^0=x_j\,,\quad \frac{\partial S(p'^0,x'^0)}{\partial x_j'^0}=\xi_j^0 \qquad j=k+1,\dots,n+1 \quad .$$

$$\frac{\partial S(p'^0, x'^0)}{\partial p'_i} = -\eta_i^0 \qquad p_i'^0 = p_i \qquad i = 1,\dots,k$$

Эта система, очевидно, имеет единственное решение

$$\xi_j^0 = \frac{\partial S(p,x)}{\partial x_j} \qquad j = k+1,\dots,n+1$$

$$x_j'^0 = x_j$$

$$\eta_i^0 = -\frac{\partial S(p,x)}{\partial p_i} \qquad i = 1,\dots,k$$

$$p_i'^0 = p_i$$

Поскольку определитель

$$\det \begin{Vmatrix} 0 & \|\delta_{ij}\| & & \\ \|\delta_{ij}\| & \left\|\frac{\partial^2 S(p,x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\| & 0 & \\ & 0 & \left\|\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\right\| & \|\delta_{ij}\| \\ & & \|\delta_{ij}\| & 0 \end{Vmatrix} = 1,$$

то можно непосредственно применить метод стационарной фазы к $I_3(x,p,h)$.

Применяя метод стационарной фазы к $I_3(x,p,h)$ и учитывая, что

$$I(x,p,h) = I_3(x,p,h) + O(h^N),$$

получим

$$I(x,p,h) = e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\Big\{L(\eta^0,x,p,\xi^0,0)\varphi_\delta(p,x,h) +$$

$$+ih\Big[a_0 L(\eta^0,x,p,\xi^0,0) + \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1} b_j \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} c_i \frac{\partial L^0}{\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} b_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} + \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i \partial p_j} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k} d_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1} e_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k} f_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i \partial \xi_j^0} -$$

$$-i\frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0,x,p,\xi,h)\Big|_{h=0} \varphi_\delta(x,p,h) +$$

$$+\sum_{i=2}^{N} h^i P_i(x,\hat{\xi},p,\hat{\eta})\varphi_\delta(p,x,h) + h^{N+1} z_h(p,x,h)\Big\} \qquad (3.4)$$

Здесь $L^0 = L(\eta^0,x,p,\xi^0,h)\big|_{h=0}$, $\eta_i^0 = -\dfrac{\partial S}{\partial p_i}$, $\xi_j^0 = \dfrac{\partial S}{\partial x_j}$,

$i=1,\dots,k \quad j=k+1,\dots,n+1,$

$P_i(x,\hat{\xi},p,\hat{\eta})$ – полином $2i$ -той степени относительно $\hat{\xi}, \hat{\eta}$, $a_i$, $b_i$, $c_i$, $a_{ij}$, $b_{ij}$, $d_{ij}$, $e_{ij}$, $f_{ij}$ – коэффициенты, зависящие от $p$ и $x$. Определим их. Пусть $\tilde{L}(\hat{\eta},x,p,\hat{\xi},h) = C_0 = const$, тогда, очевидно,

$$I(x,p,h)=C_0\, e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\varphi_\delta(p,x,h)$$

Из $(3.4)$ следует, что $a_0=0$. Пусть теперь

$$\widetilde{L}(\hat{\eta},x,p,\hat{\xi},h)=\hat{\eta}_i+\hat{\xi}_j+p_\nu .$$

В этом случае, очевидно, что $I(x,p,h)$ можно представить в виде

$$I(x,p,h)=\left[ih\left(\frac{\partial}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+p_\nu\right]e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\varphi_\delta(p,x,h)$$

Следовательно,

$$I(x,p,h)=e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\Big[p_\nu\varphi_\delta+\varphi_\delta\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}-\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)+$$

$$+ih\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_j}\right)$$

Поскольку $\dfrac{\partial\widetilde{L}}{\partial\hat{\xi}_i}=\delta_{ij}$ ; $\dfrac{\partial\widetilde{L}}{\partial\hat{\eta}_j}=\delta_{ij}$ ,

$$\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial p_j}=\delta_{\nu j} ,$$

то из $(3.4)$ получаем

$$a_j=\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial p_j}\qquad j=1,\dots,k \tag{3.5}$$

$$b_j = -\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_j} \qquad j = k+1, \ldots, n+1 \qquad (3.6)$$

$$c_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, k \qquad (3.7)$$

Пусть далее $\mathcal{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = \hat{\eta}_i \hat{\eta}_j + \hat{\xi}_\ell \hat{\xi}_m$

В этом случае

$$I(x, p, h) = -h^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_\ell} + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) e^{\frac{i}{h} S(p,x)} \varphi_\delta(p, x, h)$$

Следовательно,

$$I(x, p, h) = e^{\frac{i}{h} S(p,x)} \Big[ \frac{\partial S}{\partial x_\ell} \frac{\partial S}{\partial x_m} \varphi_\delta + \frac{\partial S}{\partial p_i} \frac{\partial S}{\partial p_j} \varphi_\delta -$$

$$- ih \left( \frac{\partial S}{\partial x_\ell} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_m} + \frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_\ell} \right) - ih \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x_m \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right) \varphi_\delta -$$

$$- h^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial x_m \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial p_i \partial p_j} \right) - ih \left( \frac{\partial S}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_j} + \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_i} \right) \Big] \qquad (3.$$

Из $(3.4)$ и $(3.8)$ следует

$$a_{ij} + a_{ji} = -\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \varphi_\delta \qquad (3.9)$$

$$b_{ij} + b_{ji} = -\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_\sigma \qquad (3.10)$$

Подставив $a_{ij}$, $b_{ij}$ из (3.9)-(3.10) в (3.4), получим

$$\sum_{i,j=1}^{k}{}' a_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^\circ \partial \eta_j^\circ} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k}{}' \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^\circ \partial \eta_j^\circ} \qquad (3.11)$$

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1}{}' b_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^\circ \partial \xi_j^\circ} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^{n+1}{}' \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_j^\circ \partial \xi_i^\circ} \qquad (3.12)$$

Пусть теперь $\mathcal{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = p_i p_j + \hat{\eta}_m p_\ell$

В этом случае

$$I(x,p,h) = \left(ih\frac{\partial}{\partial p_m} p_\ell + p_i p_j\right) e^{\frac{i}{h} S(p,x)} \varphi_\sigma(p,x,h) =$$

$$= p_i p_j e^{\frac{i}{h} S(p,x)} \varphi_\sigma(p,x,h) + e^{\frac{i}{h} S}\left(ih\, \delta_{m\ell} \varphi_\sigma - p_\ell \frac{\partial S}{\partial p_m} \varphi_\sigma + \right.$$

$$\left. + ih\, p_\ell \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial p_m}\right)$$

Поскольку $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}(\eta, x, p, \xi, h)}{\partial \eta_i \partial p_j} = \delta_{mi} \delta_{\ell j}$, то из (3.4) следует, что

$$\sum_{i,j=1}^{k} d_{ij}\,\delta_{mi}\,\delta_{\ell j} = \delta_{m\ell}\ \varphi_\sigma \qquad (3.13)$$

$$d_{m\ell} = \delta_{m\ell}\ \varphi_\sigma\ ; \quad c_{ij} = 0$$

Предположим, что $\widetilde{L} = \hat{q}_\ell\ \hat{\xi}_m + p_\nu\ \hat{\xi}_\ell$

Следовательно,

$$I(x,p,h) = h^2 \frac{\partial^2}{\partial p_\ell\, \partial x_m}\ e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\ \varphi_\sigma(p,x,h) - ih\,p_\nu \frac{\partial}{\partial x_\ell}\ e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\ \varphi(p,x,h)$$

$$= e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\Big[-\frac{\partial S}{\partial x_m}\ \frac{\partial S}{\partial p_\ell}\ \varphi_\sigma + ih\Big(\frac{\partial S}{\partial x_m}\ \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial p_\ell} + \frac{\partial S}{\partial p_\ell}\ \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_m}\Big) +$$

$$+ ih\,\frac{\partial^2 S}{\partial p_\ell\, \partial x_m}\ \varphi_\sigma + h^2\,\frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial p_\ell\, \partial x_m} - ih\,p_\nu\Big(\frac{i}{h}\ \frac{\partial S}{\partial x_\ell}\ \varphi_\sigma + \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\ell}\Big)\Big]$$

$$(3.14)$$

Отсюда и из (3.4) получаем

$$\sum_{j=k+1}^{n+1}\ \sum_{i=1}^{k} e_{ij}\ \delta_{mj}\ \delta_{\ell i} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_\ell\, \partial x_m}\ \varphi_\sigma$$

Отсюда

$$e_{lm} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m} \varphi_\sigma \qquad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.4) следует, что $f_{ij} = 0$

Из соотношений (3.5)-(3.7), (3.9)-(3.13), (3.15) при $0 \le x_{n+1} \le a$ следует равенство

$$\tilde{L}\psi_\sigma = \tilde{L}\psi = \tilde{L} e^{\frac{i}{h}S(p,x)} \varphi(p,x,h) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i h)^{n+1}} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int \prod_{j=k+1}^{n+1} d\xi_j \prod_{i=1}^{k} d\eta_i \, e^{\frac{i}{h}\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_j x_j} \times$$

$$\times e^{-\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{k}\eta_j p_j} \Big[ \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int e^{\frac{i}{h}\left(\sum_{j=1}^{k}\eta_j p_j' - \sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_j x_j'\right)} L(\eta, x, p', \xi, h) \times$$

$$\times e^{\frac{i}{h}S(p',x')} \varphi_\sigma(p', x', h) \prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' \prod_{i=1}^{k} dp_i' \Big] =$$

$$= e^{\frac{i}{h}S} \Big\{ L^0\varphi + ih \Big[ \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{1}{2}\Big( \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} \Big) \varphi -$$

$$- i \frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0, x, p, \xi^0, h)\Big|_{h=0} \varphi \Big]_{\substack{\eta^0 = -\mathrm{grad}_p S(p,x) \\ \xi^0 = \mathrm{grad}_x S(p,x)}} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{N} h^i P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi + h^{N+1} z_h(p,x,h) \qquad (3.16)$$

В силу того, что

$$\hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h)\, \Phi^{p_1 \cdots p_k} \psi(x, p, h) = \Phi^{p_1 \cdots p_k} \tilde{L} \psi, \quad а$$

$\Phi^{p_1 \cdots p_k}$ отображает $R_h$ в $R_h$,

мы получаем утверждение леммы.

3°. Случай бесконечно-кратных термов.

Рассмотрим оператор $\hat{L}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h)$, в счетно-нормированном пространстве $R_h$.

Напомним, что

$$\hat{L}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h) = \sum_{k=0}^{m} \hat{L}_k(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, \hat{p}_{n+1}^{k}$$

$$\hat{L}_m \equiv 1, \quad \hat{p}_j = -ih \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n; \quad \hat{p}_{n+1} = ih \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \quad x_{n+1} = t,$$

а операторы $\hat{p}_j$ действуют "первыми", т.е.

$$\hat{L}_k(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, \psi(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \Phi^{p_1 \cdots p_n} L_k(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, \Phi^{\xi_1 \cdots \xi_n} \psi(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Мы предположим, что

$$L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \qquad (3.16a)$$

является константой в $B^1$, (зависящей, разумеется, от параметров $x_1, \dots, x_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}$), (т.е. собственное значение оператора (3.16a) (терм) является бесконечно-кратным.)

Здесь $L(\rho_1,\dots,\rho_{n+1},x_1,\dots,x_{n+1},h)=\sum_{k=0}^{m}L_k(\rho_1,\dots,\rho_n,x_1,\dots,x_{n+1},h)\rho_{n+1}^k$

Возвращаясь к нашим прежним обозначениям, переобозначим

$L(\rho_1,\dots,\rho_{n+1},x_1,\dots,x_{n+1},h)$ через $L(\eta,x,\rho,\xi,h)$, где

$\eta=\eta_1,\dots,\eta_k\equiv x_1,\dots,x_k$, $\xi=\xi_{k+1},\dots,\xi_{n+1}\equiv\rho_{k+1},\dots,\rho_{n+1}$

Через $L^\circ$ обозначим $L(\eta,x,\rho,\xi,0)$, равный (3.16а)[x/].

Таким образом, $L^\circ(\eta,x,\rho,\xi)$ есть многочлен порядка $m$ относительно $\xi_{n+1}\equiv\rho_{n+1}$. Предположим, что

1) Полином $L^\circ(\eta,x,\rho,\xi)$ имеет действительный корень $\xi_{n+1}\equiv\rho_{n+1}=\lambda(\rho_1,\dots,\rho_n,x_1,\dots,x_n,t)$[xx/] постоянной кратности и, следовательно,

$$\frac{\partial L^\circ}{\partial\lambda}=\frac{\partial L^\circ}{\partial\rho_{n+1}}\Big|_{\rho_{n+1}=\lambda(\rho_1,\dots,\rho_n,x_1,\dots,x_n,t)}$$

отлична от нуля.

2) Оператор $L(\rho_1,\dots,\rho_n,\rho_{n+1},x_1,\dots,x_n,t,h)$ вместе со всеми производными по параметрам и оператор

$$\exp\{it\,\partial L/\partial h\}_{h=0}$$

отображают $B^\infty$ в $B^\infty$.

3) Выполняются предположения I, I$^0$, § 3.

При этих предположениях для достаточно малого $t$ существует, очевидно, решение $S(t)=S(x_0,\rho_0,t)$, $\rho(t)=\rho(x_0,\rho_0,t)$, $x(t)=x(x_0,\rho_0,t)$ $x_0=x_{01},\dots,x_{0k}$, $\rho_0=\rho_{0k+1},\dots,\rho_{0n}$ системы

$$\dot x_i=-\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_i},\quad \dot\rho_i=\frac{\partial\lambda}{\partial x_i},\quad \dot S=\lambda-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_i}\rho_i\qquad i=1,\dots,n$$

---

x/ В обозначениях § I гл. 4 $L^\circ=\mathcal{L}_0\equiv\mathcal{L}_0^*\equiv\lambda(\eta,x,\rho,\xi)$

xx/ В отличие от обозначений § I гл.4, где корень $\rho_{n+1}$ обозначался через $H(\rho,x,t)$

которое удовлетворяет начальным условиям, отвечающим локальной карте типа $\tilde{\Omega}_k$ лагранжева подмногообразия, т.е.

$$
\begin{aligned}
&S(0) = S^0(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}) \\
&p_i(0) = p_{0i} \quad i = 1, \dots, k, \qquad x_j(0) = x_{0j} \quad j = k+1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_i(0) = -\frac{\partial S^0}{\partial p_{0i}} = x_{0i}(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0,k+1}, \dots, x_{0n}) \\
&\qquad\qquad i = 1, \dots, k \\
&p_j(0) = \frac{\partial S^0}{\partial x_{0j}} = p_{0j}(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}) \\
&\qquad\qquad j = k+1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Для достаточно малого времени $t$ существует также, очевидно, единственное решение $p_{0i} = p_{0i}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$

$$x_{0j} = x_{0j}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$$

неявной системы уравнений:

$$p_i(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, t) = p_i \qquad i = 1, \dots, k$$

$$x_j(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, t) = x_j \qquad j = k+1, \dots, n$$

Сохраняя обозначения леммы 6.13, положим там

$$S(p,x) = \tilde{S}(x_0, p_0, t),$$

где $x_0 = x_0(x, p, t)$, $p_0 = p_0(x, p, t)$

Как известно, в силу теоремы Гамильтона-Якоби решения системы (3.17)-(3.19) удовлетворяют также системе

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}(\eta^0, x, p, \xi^0) \qquad j = K+1, \ldots, n+1,$$

где $\quad \eta_i^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i}, \quad \xi_j^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, K, \; j = K+1, \ldots, n+1$

Следовательно, справедливо равенство:

$$-\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_i^0} + \sum_{j=K+1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j} = \frac{d\varphi}{d\tau} \qquad (3.20)$$

Рассмотрим оператор, стоящий в правой части формулы (3.1) в фигурных скобках, на который действует оператор $\Phi^{p_1 \ldots p_K}$ Обозначим этот оператор чрез $R$. Таким образом, формула (3.1) перепишется в виде

$$L\,\Phi^{p_1 \ldots p_K} \varphi = \Phi^{p_1 \ldots p_K} R \varphi + h^{N+1} \qquad z_h \quad (3.21)$$

Сделаем замену

$$\varphi = \frac{u}{\sqrt{J}},$$

где

$$J = \frac{D(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)}{D(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, \tau)}$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{du}{d\tau} - \frac{1}{2}\, u\, \frac{d}{d\tau} \ln J\right)$$

В силу леммы С.Л.Соболева / 71 / см. гл 5, §5, п. А)

$$\frac{d}{d\tau} \ln J = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial L^0}{\partial \eta_i^0}(\eta^0, x, p, \xi^0)\right\} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}(\eta^0, x, p, \xi^0)\right\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$-2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial \xi_j^0} \qquad (3.22)$$

Отсюда

$$R\varphi = \tilde{R} u = e^{\frac{i}{h} S}\left\{\frac{h}{\sqrt{J}}\left(-i \frac{du}{d\tau} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_i \partial p_i}\, u + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial L}{\partial h}\Big|_{h=0} + \sum_{i=2}^{N} h^i P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right) u\right\} = -ih(Au + hBu),$$

поскольку в этом случае $L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = 0$.

Рассмотрим оператор

$$\tilde{R}u = -ih(Au + hBu) \qquad (3.23)$$

где

$$A = \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_i \partial p_i} + i\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}; \quad B = i\sum_{j=0}^{N-2} h^j P_{j+2}\left(x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Обозначим через $\tilde{A}$ сужение оператора $A$ на множестве функций, обращающихся в нуль при $\tau = 0$.

Очевидно, что $\tilde{A}^{-1}$ существует.

Поскольку $P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right)$ выражаются линейно через производные от $L$ по параметрам $p, x, h$, а последние по условию отображают $B^\infty$ в себя, то и $P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right)$ отображают $B^\infty$ в себя. Очевидно, что, если $f(x) \in R_h$ и бесконечно дифференцируемо в $R_h$, то $P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right) f(x) \in R_h$ и бесконечно дифференцируемы в $R_h$.

Далее, поскольку $\exp\left\{ i \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0} t\right\}$ отображает $B^\infty$ в $B^\infty$, то решение уравнения

$$A\, v(t) = 0, \qquad (3.24)$$

удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию $v|_{t=0} = v_0 \in R_h$, бесконечно дифференцируемому в $R_h$, то и $v(t) \in R_h$ и бесконечно дифференцируемо в $R_h$. То же замечание справедливо и относительно оператора $\tilde{A}^{-1}$. Поэтому, действительно, $(\tilde{A}^{-1}B)^N v(t) \in R_h$ для любого $N$, и при этом бесконечно дифференцируемо в $R_h$.

Пусть $v^i(t)$ – решения уравнения (3.24), удов-

летворяющие начальным условиям, бесконечно дифференцируемым в $R_h$.

Аналогично тому, как это было сделано в лемме 5.5 можно доказать, что выражение

$$u_N=\sum_{n=0}^{N}(-h)^n\sum_{i=0}^{n}(\tilde{A}^{-1}B)^i v^{n-i}(t)$$

удовлетворяет уравнению

$$Au_N+hBu_N=h^{N+1}\tilde{z}_h,$$

где $\tilde{z}_h\in R_h$.

Отсюда следует, что

$$\hat{L}\Phi^{p_1\dots p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{\frac{i}{h}S(p,x)}u_N=-ih^{N+2}\Phi^{p_1\dots p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{\frac{i}{h}S(p,x)}\tilde{z}_h+$$

$$+h^{N+1}z_h(x,t,h)=h^{N+1}\bar{z}_h(x,t) \qquad (3.25)$$

$\bar{z}_h(x,t)\in R_h$

в силу того, что оператор $\Phi^{p_1\dots p_k}$ отображает $R_h$ на $R_n$

По условию существует решение $w\in V_h$ уравнения

$$h^{r}\hat{L}'w=\bar{z}_h(x,t,h)$$

Поэтому

$$\hat{L}\left(\Phi^{p_1\dots p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{\frac{i}{h}S}u_N-h^{N+1-r}w\right)=0 \qquad (3.26)$$

Поскольку $N$ сколь угодно велико, то отсюда следует

Теорема. 6.I

При высказанных предположениях существует решение уравнения

$$L\psi(x,t)=0,$$

представимое в виде:

$$\psi(x,t)=\Phi^{p_1\dots p_k}\left\{\frac{e^{\frac{i}{h}S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)}}{\sqrt{\frac{D(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n)}{D(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0k+1},\dots,x_{0n})}}\sqrt{\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}}}\times\right.$$

$$\times\exp\left[\int_0^t\left(\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2L^0}{\partial x_j\partial p_j}-i\frac{\partial L}{\partial h}\Big|_{h=0}\right)dt\right]\times$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{N}h^j\varphi_j(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)\right\}+h^{N+1}z_h(x,t,h)$$

Здесь $\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial^2L^0}{\partial x_j\partial p_j}$, $\frac{\partial L}{\partial h}\Big|_{h=0}$ –

функции $x=x(x_0,p_0,t)$, $p=p_0(x_0,p_0,t)$,

а $S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)=\widetilde{S}(x_0(p,x,t),p_0(p,x,t),t)$,

$\varphi_j(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)$ –
–некоторые бесконечно дифференцируемые функции, финитные по $p$ и $x$ со значениями в $B^{\infty}$, $z_h\in R_h$, причем

$$\varphi_0(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)=f(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0k+1},\dots,x_{0n}),$$

где $f$ – произвольная финитная функция.

$4^{\circ}$. Случай конечно-кратных термов.

Теперь мы предположим, что выполнено условие I) теоремы 4.1, причем точка $\lambda(p,p_{n+1},x,t)$ (терм) конечнократна.

Мы сохраним обозначения и предположения 1), 2) п $I^{\circ}$ и предположение 1) п 4, § 2.

Основные тождества.

Пусть $\chi_1,\dots,\chi_r$ – ортонормированная система собственных векторов

$$L\big|_{h=0}\chi_i=L^{\circ}\chi_i=\lambda\chi_i \qquad i=1,\dots,r \tag{3.27}$$

$$\chi_i=\chi_i(x_1,\dots,x_n,t,p_1,\dots,p_{n+1});\quad \lambda=\lambda(x_1,\dots,x_n,t,p_1,\dots,p_{n+1}),$$

а $\chi_1^+,\dots,\chi_r^+$ – ортонормированная система собственных векторов оператора $(L^{\circ})^*$:

$$(L^{\circ})^*\chi_i^+=\lambda\chi_i^+,\qquad i=1,\dots,r \tag{3.28}$$

при том же значении $\lambda=\lambda(x_1,\dots,x_n,t,p_1,\dots,p_{n+1})$.

Докажем следующие равенства

3) а) $\left( \mathcal{X}_j^+ , \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} \mathcal{X}_i \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} a_{ij}$ ;

б) $\left( \mathcal{X}_j^+ , \frac{\partial L^0}{\partial x_\nu} \mathcal{X}_i \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} a_{ij}$ $\qquad a_{ij} = (\mathcal{X}_j^+, \mathcal{X}_i)$

Продифференцировав (3.27) по $p_\nu$ , получим

$$\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} \mathcal{X}_i + L^0 \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \mathcal{X}_i + \lambda \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial p_\nu} \qquad (3.29).$$

Умножая скалярно это тождество на $\mathcal{X}_j^+$ и учитывая (3.28), получим равенство 3а. Аналогично из

$$\frac{\partial L^0}{\partial x_\nu} \mathcal{X}_i + L^0 \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \mathcal{X}_i + \lambda \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial x_\nu} ,$$

получаем 3б.

Продифференцируем (3.29) по $x_\mu$ . Мы получим

$$\frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \mathcal{X}_i + \frac{\partial L^0}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial p_\nu} + \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial x_\mu} + L^0 \frac{\partial^2 \mathcal{X}_i}{\partial p_\nu \partial x_\mu} =$$

$$= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \mathcal{X}_i + \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial p_\nu} + \lambda \frac{\partial^2 \mathcal{X}_i}{\partial x_\mu \partial p_\nu}$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathcal{X}_j^+$ , получим

$$4а) \left( \mathcal{X}_j^+ , \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \mathcal{X}_i \right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \delta_{ij} + \left( \mathcal{X}_j^+ , \left[ \frac{\partial L^0}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \right] \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial p_\nu} \right) +$$

$$+ \left( \mathcal{X}_j^+ , \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \right] \frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial x_\mu} \right) = 0$$

и аналогично

$$4б)\ \left(\chi_j^+, \frac{\partial^2 L^\circ}{\partial p_\nu \partial p_\mu}\chi_i\right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial p_\mu}\delta_{ij} + \left(\chi_j^+, \left[\frac{\partial L^\circ}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\mu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}\right) +$$

$$+\left(\chi_j^+, \left[\frac{\partial L^\circ}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\mu}\right) = 0$$

Обозначим, как и ранее, через $R$ оператор, стоящий в правой части равенства (3.1) в фигурных скобках, так что равенство (3.1) переписывается в виде

$$L\,\Phi^{p_1\dots p_k}\psi = \Phi^{p_1\dots p_k} e^{\frac{i}{h}S(p,x)} R\varphi + h^{N+1} z_h(x,t)$$

В этом случае мы представим $R$ в виде

$$R = A + \sum_{i=1}^{N} h^i U_i\ ,$$

где

$$A = L(\eta^\circ, x, p, \xi^\circ, 0) = L^\circ$$

$$U_1 = i\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L^\circ}{\partial \eta_j^\circ}\frac{\partial}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial L^\circ}{\partial \xi_j^\circ}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 L^\circ}{\partial \eta_i^\circ \partial \eta_j^\circ} +\right.\right.$$

$$+\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^\circ}{\partial \xi_i^\circ \partial \xi_j^\circ} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^\circ}{\partial \eta_i^\circ \partial \xi_j^\circ} -$$

$$\left.\left.-2\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 L^\circ}{\partial \eta_i^\circ \partial p_i}\right)\right] + \frac{\partial L}{\partial h}\bigg|_{h=0}$$

Очевидно, что решение уравнения

$$A\chi=0$$

существует, когда $\chi$ принадлежит подпространству собственных векторов оператора $L^{0}$, т.е. $S(p,x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\lambda\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, p, \frac{\partial S}{\partial p}\right)=0 \qquad (3.30)$$

по условию

$$\tilde{A}=A(1-P_\lambda)$$

имеет обратный в $B^{\infty}$ и оператор

$$[A(1-P_\lambda)]^{-1}(1-P_\lambda^{+})$$

определен на всем $B^{\infty}$;

$\tilde{A}$ есть сужение оператора A на подпространстве $(1-P_\lambda)B^{\infty}$, имеющее обратный.

Для того чтобы можно было применить лемму 5.5(1) теории возмущений и найти такое $\varphi$, чтобы

$$R\varphi=h^{N+1}z_h,$$

нам нужно существование $N$ членов теории возмущений.

Так для определения первого члена асимтотики в этой лемме требуется существование

выражения вида

$$\tilde{A}^{-1}U_1\chi$$

Это означает, что $U_1\chi\in D(\tilde{A}^{-1})$, т.е.

$$P_\lambda^{+}U_1\chi=0$$

Предположим вначале, что размерность $\tau$ подпростран-

ства собственных функций оператора $L^{0}$ равна I, т.е. точка $\lambda$ - простая. Тогда условие (3.30) примет вид

$$(\mathcal{X}^{+}, U_1 \mathcal{X}) = 0 \qquad (3.31)$$

Скалярное произведение понимается здесь в объемлющем пространстве $B^{1}$. Поскольку $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \varphi_0$, где $\| \mathcal{X}_0 \| = 1$, а $\varphi_0 = \varphi_0(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$ - скалярная функция, а, с другой стороны, оператор $U_1$ есть оператор в $R_h$, включающий дифференцирование по аргументам $p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$,
то уравнение (3.31), которое, очевидно, мы можем переписать в виде

$$(\mathcal{X}_0^{+}, U_1 \mathcal{X}_0) \quad \varphi_0 = 0 \qquad (3.31a)$$

есть дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi_0(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$

Совершенно аналогично в случае $z$-кратного собственного значения $\lambda$, если $\mathcal{X}_{01}, \ldots, \mathcal{X}_{0z}$ - ортонормированная система собственных векторов, то уравнение (3.31a) можно переписать в виде системы дифференцированных уравнений для определения скалярных коэффициентов $\varphi_{01}, \ldots, \varphi_{0z}$ при $\mathcal{X}_{01}, \ldots, \mathcal{X}_{0z}$

(Напомним снова, что хотя

$$\varphi_{0i} = \varphi_{0i}(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$$

являются функциями параметров $p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$,

но являются функциями со значениями на прямой, т.е. скалярами в пространстве $B^1$. Векторы же $\chi_{01},\dots,\chi_{0r}$ являются функциями $p_1,\dots,p_k, x_{k+1},\dots,x_{n+1}$ но со значениями в $B^1$, причем эти векторы по норме в $B^1$ равны единице).

Система уравнений, эквивалентная (3.31a) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi_i^+, U_1 \chi_j)\, \varphi_{0j} = 0 \qquad i=1,\dots,r$$

В силу леммы 5.5 для вычисления следующего члена нужно, чтобы элемент

$$U_1 (\tilde{A}^{-1} U_1 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j + \sum_{j=1}^{r} \varphi_{1j}\chi_j) + U_2 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j$$

принадлежал области определения оператора $\tilde{A}^{-1}$, т.е.

$$P_\lambda^+ \left\{ U_1 [\tilde{A}^{-1} U_1 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j + \sum_{j=1}^{r} \varphi_{1j}\chi_j] + U_2 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j \right\} = 0$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi_i^+, U_1 \chi_j)\varphi_{1j} = -(\chi_i^+, [U_1 \tilde{A}^{-1} U_1 + U_2] \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j),$$

и мы получаем систему уравнений для определения

$$\varphi_{1j} = \varphi_{1j}(p_1,\dots,p_k, x_{k+1},\dots,x_{n+1})$$

Аналогично, очевидно, для $k$ -того члена

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1} \sum_{j=1}^{k} U_j f_{k-j}$$

мы должны потребовать, чтобы

$$\sum_{i=1}^{K+1} U_i f_{K+1-i} \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{-1})$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{r} (\mathcal{X}_i^+, U_1 \mathcal{X}_j)\varphi_{kj} = \mathcal{F}, \tag{3.32}$$

где $\mathcal{F}$ зависит лишь от $\varphi_{ij}$ при $i<k$, и мы получим уравнение для

$$\varphi_{kj} = \varphi_{kj}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$$

Итак, задача сводится к отысканию дифференциального оператора $L = (\mathcal{X}_i^+, U_1 \mathcal{X}_j)$ в пространстве $C^\infty$ и доказательству существования решений $\varphi$ уравнений

$L\varphi = 0$ и $L\varphi = \mathcal{F}$

где $\varphi \in C^\infty$ и $\mathcal{F} \in C^\infty$ (3.33)

Заметим, что оператор $U_1$ состоит из суммы вида

$$U_1 = i\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial}{\partial p_\nu} - i\sum_{\mu=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + R_1,$$

где оператор $R_1$ не содержит операторов дифференцирования, а является оператором в $B^\infty$, зависящим от параметров $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$.

Поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{r} (\mathcal{X}_\beta^+, U_1 \mathcal{X}_\alpha)\varphi_{e\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{r} i\left\{\sum_{\nu=1}^{k} \left(\mathcal{X}_\beta^+, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu^0} \mathcal{X}_\alpha\right) \frac{\partial \varphi_{e\alpha}}{\partial p_\nu} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu=k+1}^{n+1} \left(\mathcal{X}_\beta^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu^0} \mathcal{X}_\alpha\right) \frac{\partial \varphi_{e\alpha}}{\partial x_\mu}\right\} + \sum_{i=1}^{r} a_{i\beta}\varphi_{ei}$$

где $a_{i\beta}$ — известные функции параметров $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$

В силу тождества 3)

$$\sum_{\alpha=1}^{r} (\mathcal{X}_\beta^+, U_1 \mathcal{X}_\alpha)\, \varphi_{e\alpha} = i \Big( \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \varphi_{e\beta} - \sum_{\nu=k+1}^{n+1} \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \varphi_{e\beta} \Big) + \sum_{i=1}^{r} a_{i\beta} \varphi_{ei} = -i \frac{d \varphi_{e\beta}}{d\tau} + \sum_{i=1}^{r} a_{i\beta} \varphi_{ei} \qquad (3.34)$$

где $\frac{d}{d\tau}$ – производная вдоль траекторий системы Гамильтона, отвечающей (3.30)

Отсюда следует, что решения уравнений (3.32), (3.33) существуют. Далее, применяя рассуждения (3.25), (3.26), мы приходим к асимптотике решения уравнения

$$\hat{L}\psi = 0 \qquad 3.33$$

Нам, однако, еще нужно получить решение уравнения в "явном виде", т.е. выписать матрицу $a_{i\beta}$ в (3.34)
Для этого мы воспользуемся тождествами 3) - 4).
Заметим прежде всего, что

$$(\mathcal{X}_\nu^+, U_1 \mathcal{X}_\mu) = -i\,\delta_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} + i \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \Big(\mathcal{X}_\nu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} \frac{\delta \mathcal{X}_\mu}{\delta p_j}\Big) - \sum_{j=k+1}^{n+1} \Big(\mathcal{X}_\nu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} \frac{\delta \mathcal{X}_\mu}{\delta x_j}\Big) \Big\} + R_2, \qquad R_2 = (\mathcal{X}_\nu^+, R_1 \mathcal{X}_\mu)$$

где $\delta/\delta p_j$ и $\delta/\delta x_j$ обозначают полные частные производные по независимым переменным $p_1, \dots, p_k$, $x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$, т.е.

$$\frac{\delta \mathcal{X}_\mu}{\delta p_j} = \frac{\partial \mathcal{X}_\mu}{\partial p_j} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{X}_\mu}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial \eta_\nu^0}{\partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial \mathcal{X}_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial \xi_i^0}{\partial p_j} =$$

$$= \frac{\partial X_\mu}{\partial p_j} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial X_\mu}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu \partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial p_j} \qquad j=1,\dots,n$$

Аналогично

$$\frac{\delta X_\mu}{\delta x_j} = \frac{\partial X_\mu}{\partial x_j} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial X_\mu}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial \eta_\nu^0}{\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial \xi_i^0}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial X_\mu}{\partial x_j} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial X_\mu}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu \partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$j = 1,\dots, n+1; \qquad (x_{n+1} = t).$$

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем пункте, положим

$$\varphi_{0j} = \frac{u_j}{\sqrt{J}},$$

где

$$J(p,x,t) = \frac{D(p_1,\dots,p_k, x_{k+1},\dots,x_n, t)}{D(p_{01},\dots,p_{0k}, x_{0k+1},\dots,x_{0n},\tau)}$$

($p_1,\dots,p_k, x_{k+1},\dots,x_n, t$ – решение системы Гамильтона $\dot p = -\partial\lambda/\partial x$, $x = \partial\lambda/\partial p$, $\dot t = \partial\lambda/\partial p_{n+1}$, причем $t(0)=0$, а $p$ и $x$ удовлетворяют условиям (3.18) – (3.19) ).

в силу леммы С.А.Соболева [71] $J$ удовлетворяет уравнению (см. гл. 5, § 5, предположение А)

$$\frac{d}{d\tau}\ln J = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i^0\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i^0\partial\eta_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial p_j} +$$

$$+\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i^0\partial\xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i^0\partial\xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial x_j} +$$

$$+\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j\partial\xi_j^0}$$

Подставляя

$$\frac{d\varphi_{0j}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{du_j}{d\tau} - \frac{1}{2}u_j\frac{d}{d\tau}\ln J\right)$$

в выражение для оператора $U_1$ (см. (3.35) ) и учитывая тождества 4а), 4б) вида

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left\{\left(X_\nu^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial\xi_i^0\partial\xi_j^0}X_\mu\right) - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i^0\partial\xi_j^0}\delta_{\mu\nu}\right\} =$$

$$=\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left\{\left(X_\nu^+,\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i^0} - \frac{\partial L^0}{\partial\xi_i^0}\right]\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_j^0}\right) + \left(X_\nu^+,\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j^0} - \frac{\partial L^0}{\partial\xi_j^0}\right]\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_i^0}\right)\right\} =$$

$$= 2\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left[\left(X_\nu^+, \dot{x}_i\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_j^0}\right) - \left(X_\mu^+, \frac{\partial L^0}{\partial\xi_i^0}\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi_j^0}\right)\right]\Big\}$$

и аналогичные им, получим, используя равенства вида

$$\dot{x}_i\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j} = \dot{x}_i\frac{\partial\xi_j^0}{\partial x_i}$$

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} = \frac{d\xi_j^0}{\partial\tau} = \sum\frac{\partial\xi_j^0}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\xi_j^0}{\partial x_i}\dot{x}_i$$

и аналогичные им, следующее уравнение для вектора $u=(u_1,\dots,u_r)$

$$\frac{du}{d\tau}+\mathcal{G}u=0,$$

где $\mathcal{G}$ – матрица вида:

$$\mathcal{G}=\Big\| \left(\mathcal{X}_\nu^+,\ \frac{d\mathcal{X}_\mu}{d\tau}\right)+\sum_{i=1}^{n+1}\left(\mathcal{X}_\nu^+,\left(\frac{\partial L^0}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\right)\frac{\partial\mathcal{X}_\mu}{\partial x_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial p_i\partial x_i}\delta_{\mu\nu}+i\left(\mathcal{X}_\nu^+,\frac{\partial L}{\partial h}\mathcal{X}_\mu\right)_{h=0}\right\| \qquad (3.36)$$

Оператор $\sqrt{J}\,(\mathcal{X}_\nu^+,\ U_1\,\mathcal{X}_\mu)\frac{1}{\sqrt{J}}$,
соответственно, имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}+\mathcal{G}$$

Отсюда следует

<u>Теорема</u> 6.2.

При высказанных предположениях для **любой финитной** $\varphi_0(p,x,t)$ существует решение уравнения

$$\hat{L}\psi=0\quad,$$

представимое в виде

$$\psi(x,t) = \Phi^{p_1 \dots p_k} \frac{e^{\frac{i}{h} S(p,x,t)}}{\sqrt{\mathcal{J}(p,x,t)}} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=0}^{N} h^j \varphi_{j\nu}(p,x,t) X_\nu(p,\xi^\circ,\eta^\circ,x,t) +$$

$$+ h^{N+1} z_h(x,t,h), \tag{3.37}$$

где $\varphi_j(p,x,t)$ – некоторые бесконечно дифференцируемые функции, финитные по $p$ и $x$ со значениями в $B^\infty$, $z_h \in R_h$, причем $\varphi_{0\nu}(p,x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau} + \mathcal{G}\varphi_0 = 0 \qquad \varphi_0 = (\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0r}).$$

(Напомним, что функция $S(p,x,t)$ – действие – удовлетворяет уравнению (3.10), а производная $\frac{d}{d\tau}$ берется вдоль траекторий системы Гамильтона, отвечающей $S(p,x,t)$

# ГЛАВА 7. АСИМПТОТИКА В БОЛЬШОМ РЕШЕНИИ АБСТРАКТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В этой главе мы докажем теоремы, сформулированные в главах 2-4. При этом в основном мы повторять эти формулировки не будем.

## §1. Лемма о локальных координатах.

Прежде всего мы докажем лемму о локальных координатах (лемма 2.1), которая использовалась при конструкции канонического оператора.

Лемму о локальных координатах мы сформулируем в виде двух лемм 7.1а и 7.1б.

Лемма 7.1а. Пусть в точке $\alpha=\alpha^0$ матрица $B = \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\substack{i\le n\\ j\le n}}$ имеет ранг $r<n$. Тогда существует такая ортогональная $n\times n$ -матрица $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$, что при каноническом преобразовании

$$\begin{aligned} \tilde q_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha^0)\, q_j(\alpha), \\ \tilde p_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha^0)\, p_j(\alpha) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

равенство

$$\frac{\partial \tilde q_\sigma}{\partial \alpha_j}(\alpha^0)=0$$

выполняется для всех $1\le\sigma\le k$, $1\le j\le n$, где $k=n-r$.

<u>Доказательство</u>. Существуют такие ортогональные матрицы $C_1=C_1(\alpha^0)$ и $C_2=C_2(\alpha^0)$, что матрица $B_1=C_1 B C_2$ диагональна при $\alpha=\alpha^0$ (см. /20/), причем её первые $k$ строк состоят из нулей. Очевидно, что первые $k$ строк матрицы $B_2=B_1C_2^*=C_1B$ тоже равны нулю.

Докажем, что $C_1=C_1(\alpha^0)$ и есть искомая ортогональная матрица $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$. Положив $\tilde q(\alpha)=C_1 q(\alpha)$, получим $\partial\tilde q/\partial\alpha=C_1\,\partial q/\partial\alpha=C_1B=B_2$.

Отсюда следует, что $(\partial \tilde{q}_{\sigma} / \partial \alpha)_{\alpha=\alpha_0} = 0, \ \sigma = 1, \dots, k$

Преобразование $(1.1)$ оставляет инвариантными скобки Лагранжа. Лемма доказана.

<u>Лемма 7.1б</u> Если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\alpha=\alpha^0}$ равен $r$, $k = n - r$ и $\partial \tilde{q}^{(\sigma)} / \partial \alpha_j (\alpha^0) = 0$ при $\sigma \le k, \ 1 \le j \le n$, то матрица $\tilde{D}_k = \| \partial (\tilde{y}_k)_i / \partial \alpha_j \|_{i,j \le n}$, где

$$(\tilde{y}_k)_i = \begin{cases} \tilde{p}_i(\alpha) & \text{при } i \le k \\ \tilde{q}_i(\alpha) & \text{при } i > k \end{cases}, \qquad (1.2)$$

невырождена.

<u>Доказательство</u>. Умножение матрицы $B_2$ справа на $C_2$ эквивалентно ортогональному преобразованию координат $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ вида $\tilde{\alpha} = C_2^{*} \alpha$. Поэтому $B_1 = B_2 C_2 = \| \partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_j \|$.

Поскольку в матрице $B_1$ при $\alpha = \alpha^0$ отличны от нуля лишь члены $(\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha=\alpha^0}$ при $i > k$, то из условия $(2.2)$ гл. 1 следует, что

$$(\partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j)_{\alpha=\alpha^0} = 0 \quad \text{при } i > k \text{ и } j \le k \qquad (1.3)$$

Докажем, что $\det \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\|_{i,j \le k} \ne 0$. Предположим противное, тогда в силу $(1.3)$ ранг прямоугольной матрицы $A = \| \partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j \|_{\substack{i \le n \\ j \le k}}$ при $\alpha = \alpha^0$ меньше $k$. Прямоугольная же матрица $\| \partial \tilde{q}_\sigma / \partial \tilde{\alpha}_j \|_{\alpha=\alpha^0}, \ 1 \le \sigma \le n,$ равна нулю. Отсюда следует, что ранг прямоугольной матрицы вида

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{p}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \end{matrix} \right\|_{\alpha=\alpha^0} = \begin{array}{c|c|c|} & k & \tau \\ \hline n & 0 & \\ \hline n & A & \\ \hline \end{array}$$

меньше $n$ , что невозможно, поскольку $\{q(\alpha), p(\alpha)\}$ – $n$ -мерное подмногообразие. Полученное противоречие доказывает, что

$$\det \tilde{D}_k \Big|_{\alpha=\alpha^0} = \prod_{i=k+1}^{n} (\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha=\alpha^0} \cdot \det A \Big|_{\alpha=\alpha^0} \neq 0,$$

что и требовалось.

Координаты точки $\alpha^0$ вида $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$ $(k = n - \tau)$ будем называть фокальными координатами точки $\alpha^0$ , а соответствующую плоскость – фокальной плоскостью.

## §2. Доказательство теорем об инвариантности

1. Мы докажем теперь инвариантность индексов по модулю $4$ , поскольку для определения канонического оператора достаточно знать лишь такие индексы.

Если некоторая область $\Omega \subset \Gamma$ взаимно однозначно проектируется на плоскость

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \ldots = \tilde{q}_{k_1} = \tilde{p}_{k_1+1} = \ldots = \tilde{p}_n = 0,$$

то будем писать $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{k_1}$ , а если одновременно проектируется взаимно однозначно и на плоскость

$$\tilde{\tilde{q}}_1 = \tilde{\tilde{q}}_2 = \ldots = \tilde{\tilde{q}}_{k_2} = \tilde{\tilde{p}}_{k_2+1} = \ldots = \tilde{\tilde{p}}_n = 0$$

то будем сокращенно писать $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$.

Если точка $\alpha$ принадлежит элементу покрытия $\mathcal{H}$, отвечающему карте $\tilde{\Omega}_k$, то будем писать $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$.

Точки $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$ поставлены во взаимно однозначное соответствие со своими проекциями $\tilde{y}_k$ на плоскость $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \ldots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \ldots = \tilde{p}_n = 0$

.

так, что можно писать $\tilde{y}_k = \tilde{y}_k(\alpha)$

и $\alpha = \alpha(\tilde{y}_k)$.

Последняя функция определена лишь на проекции $\mho_k$ области, отвечающей $\tilde{\Omega}_k$ на указанную плоскость. Обозначим:

$$\tilde{J}_k = D\sigma(\alpha) / D\tilde{y}_k, \quad \tilde{\gamma}_k = \operatorname{Ind} \tilde{B}_k$$

Пусть $S(\alpha)$ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\partial S(\alpha) / \partial \alpha_j = p\, \partial q / \partial \alpha_j .$$

Обозначим

$$\tilde{I}_k = \tilde{I}_k(\tilde{y}_k) =$$

$$= \left[ |\tilde{J}_k|^{1/2} \varphi(\alpha) \exp\left\{ iA\left[ S(\alpha) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\alpha) \right] \right\} \right]_{\alpha = \alpha(\tilde{y}_k)},$$

где $\varphi(\alpha)$ — некоторая гладкая функция с носителем $\Omega \subset \tilde{\Omega}_k$

Соответствующие величины, отвечающие $\tilde{\tilde{\Omega}}_\kappa$, будем покрывать двумя волнами. Обозначим через $\Phi^{\tilde{q}_\kappa}$ обратное преобразование Фурье:

$$\Phi^{\tilde{q}_\kappa}\psi = \frac{e^{-\frac{i\pi\kappa}{4}}A^{\kappa/2}}{(2\pi)^{\kappa/2}}\int e^{-iA\sum_{j=1}^{\kappa}\tilde{p}_j\tilde{q}_j}\psi(\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_\kappa)\,d\tilde{q}_1\dots d\tilde{q}_\kappa \qquad (2.1)$$

В случае, когда носитель функции $\psi(\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_\kappa)$ равен $R$, интеграл нужно брать по $R$.

Доказательству трех сформулированных теорем мы предпошлем несколько лемм. Заранее условимся, что все равенства в леммах 7.2 - 7.5 и доказательстве теоремы 2.3 мы будем понимать в фактор-пространстве $S$ (см. гл. 2 § I, 2°)

Лемма 7.2. Пусть носитель $\Omega$ финитной функции $\varphi(\alpha)$ принадлежит лагранжеву многообразию $\Gamma=\{q(\alpha),\ p(\alpha)\}$ и проектируется взаимно однозначно на координатную плоскость $q$ и на плоскость $\tilde{q}_1=\tilde{q}_2=\dots=\tilde{q}_\kappa=\tilde{p}_{\kappa+1}=\ \ =\tilde{p}_n=0$, а $\mho_\kappa$ - его проекция на плоскость $\tilde{q}_1=\tilde{q}_2=\dots=\tilde{q}_\kappa=\tilde{p}_{\kappa+1}=\dots=\tilde{p}_n=0$. Тогда выражение $\Phi^{\tilde{q}_\kappa}\tilde{I}_0(q)$ равно $\tilde{I}_\kappa e^{-\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_\kappa}$ при $\tilde{y}_\kappa\in\mho_\kappa$ и равно нулю при $\tilde{y}_\kappa\,\bar{\in}\,\mho_\kappa$.

Доказательство. Для вычисления интеграла $\Phi^{\tilde{q}_\kappa}\tilde{I}_0(\tilde{q})$ применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки $\tilde{q}_i=\tilde{q}_i^0$, $i=1,\dots,\kappa$ определяются из системы

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial\tilde{q}_i}=\tilde{p}_i\,,\qquad i=1,\dots,\kappa \qquad (2.2)$$

Положим в (2.2)

$$\tilde{p}_j=\tilde{p}_j(\bar{\alpha}),\quad \tilde{q}_i=\tilde{q}_i(\bar{\alpha}),\quad \begin{matrix} i=\kappa+1,\dots,n \\ j=1,\dots,\kappa\end{matrix} \qquad (2.3)$$

Поскольку

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p}(\alpha(\tilde{q})) \quad и \quad \alpha(\tilde{q}(\tilde{\alpha})) = \tilde{\alpha} \quad при \quad \tilde{\alpha} \in \tilde{\Omega}_0,$$

то система (2.2) удовлетворяется при $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i(\tilde{\alpha})$, $i = 1, \dots, k$. Положим в системе (2.3) $\tilde{\alpha} = \alpha(\tilde{y}_k)$ $(\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \dots, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n)$.
Получим, что $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)]$, $i = 1, \dots, k$, являются решениями системы (2.2) при произвольных $\tilde{y}_k \in \mho_k$, поскольку $\tilde{p}_j[\alpha(\tilde{y}_k)] = \tilde{p}_j$, $j = 1, \dots, k$ и $\tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)] \equiv \tilde{q}_i$, $i = k+1, \dots, n$.
Если $\tilde{y}_k \bar{\in} \mho_k$, то стационарные точки $\tilde{q}_i^0$, $i = 1, \dots, k$, не принадлежат области, в которой подинтегральная функция отлична от нуля.

Единственность решения системы (2.2) в области $\tilde{y}_k \in \mho_k$ следует из того факта, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \, \partial \tilde{q}_j} \right\|_{i,j=1,\dots,k} = \det \tilde{B}_k^{-1} = \frac{D\sigma(\alpha)/D\tilde{q}}{D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k} \neq 0 \qquad (2.4)$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}_i(\tilde{\alpha})$$

Условия применимости метода стационарной фазы выполнены, откуда следует утверждение леммы (ср. [81, 3), 4)])

Лемма 7.3 Пусть носитель функции $\varphi(\alpha)$ принадлежит пересечению $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$, тогда в точках $\tilde{\tilde{y}}_{k_2} \in \mho_{k_2}$, таких, что $\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ является неособой, имеет место равенство*)

---

*) Здесь $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} \equiv \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \left[ \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} \right]_{\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{\tilde{q}})}$



28-1[illegible]

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{\kappa_2}} \Phi^{\tilde{p}_{\kappa_1}} \tilde{I}_{\kappa_1} = e^{\frac{i\pi}{2}(\tilde{\gamma}_{\kappa_1} - \tilde{\tilde{\gamma}}_{\kappa_2})} \tilde{\tilde{I}}_{\kappa_2} \qquad (2.5)$$

Доказательство. В силу леммы 7.2 в неособых точках

$$\Phi^{\tilde{q}_{\kappa_1}} \tilde{I}_0 = e^{-\frac{i\tilde{\gamma}_{\kappa_1}\pi}{2}} \tilde{I}_{\kappa_1} \qquad (2.6)$$

Отсюда

$$\tilde{I}_0 = e^{-\frac{i\tilde{\gamma}_{\kappa_1}\pi}{2}} \Phi^{\tilde{p}_{\kappa_1}} \tilde{I}_{\kappa_1} \qquad (2.7)$$

Поэтому в силу леммы 7.2

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{\kappa_2}} \Phi^{\tilde{p}_{\kappa_1}} \tilde{I}_{\kappa_1} = e^{\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_{\kappa_1}} \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{\kappa_2}} \tilde{I}_0 = e^{\frac{i\pi}{2}(\tilde{\gamma}_{\kappa_1} - \tilde{\tilde{\gamma}}_{\kappa_2})} \tilde{\tilde{I}}_{\kappa_2}, \qquad (2.8)$$

что и требовалось.

Лемма 7.4 Пусть носитель $\varphi(\alpha)$ принадлежит $\tilde{\Omega}_{\kappa_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{\kappa_2}$, тогда имеет место соотношение

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{\kappa_2}} \Phi^{\tilde{p}_{\kappa_1}} \tilde{I}_{\kappa_1} = e^{-\frac{i\pi}{2}m} \tilde{\tilde{I}}_{\kappa_2},$$

где $m$ - некоторое целое число, не зависящее от $\tilde{\tilde{y}}_{\kappa_2}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{\kappa_2}) = \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{\kappa_2}} \Phi^{\tilde{p}_{\kappa_1}} \tilde{I}_{\kappa_1},$$

имеющий вид

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{\kappa_2}) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}(\kappa_2-\kappa_1)} A^{\kappa_1+\kappa_2}}{(2\pi)^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}}} \int exp\left\{iA\left[S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{\kappa_1} \tilde{p}_j(\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) - \tilde{q}_j)\right]\right\} \cdot \tag{3.9}$$

$$\cdot exp\left[-iA\sum_{j=1}^{\kappa_2} \tilde{\tilde{p}}_j \tilde{\tilde{q}}_j\right] \left| D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_\kappa \right|^{1/2} \varphi(\bar{\alpha})\, d\tilde{p}_1 \ldots d\tilde{p}_{\kappa_1} d\tilde{\tilde{q}}_1 \ldots d\tilde{\tilde{q}}_{\kappa_2},$$

где $\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \tilde{\tilde{q}}_j$ , $det\|\beta_{ij}\| = 1$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{\kappa_1}) =$

$$= \bar{\alpha}(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_\kappa, \sum_{j=1}^{n} \beta_{\kappa+1\,j} \tilde{\tilde{q}}_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} \tilde{\tilde{q}}_j).$$

Для вычисления интеграла $(2.9)$ применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки $\tilde{\tilde{q}}_i^{\,0}, \tilde{p}_j^{\,0}$ , $i = 1, \ldots, \kappa_2$, $j = 1, \ldots, \kappa_1$ , определяются из системы

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{\kappa_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j, \quad j = 1, \ldots, \kappa_1, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{\kappa_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial \tilde{\tilde{q}}_\nu} + \sum_{j=1}^{\kappa_1} p_j \beta_{j\nu} - \tilde{\tilde{p}}_\nu = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \kappa_2 \tag{2.11}$$

Как известно,

$$\frac{\partial\left[S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{\kappa_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right]}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j(\bar{\alpha}), \quad j = 1, \ldots, \kappa_1, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\left[S(\bar\alpha)-\sum_{j=1}^{K_1}\tilde P_j\tilde q_j(\bar\alpha)\right]}{\partial\tilde q_\nu}=\tilde P_\nu(\bar\alpha),\quad \nu=K_1+1,\dots,n \qquad (2.13)$$

Из $(2.13)$ следует, что

$$\frac{\partial\left[S(\bar\alpha)-\sum^{K_1}\tilde P_j\tilde q_j(\bar\alpha)\right]}{\partial\tilde{\tilde q}_\nu}=\sum_{\ell=K_1+1}^{n}\frac{\partial\left[S(\bar\alpha)-\sum_{j=1}^{K_1}\tilde P_j\tilde q_j(\bar\alpha)\right]}{\partial\tilde q_\ell}\beta_{\ell\nu}=\sum_{\ell=K+1}^{n}\tilde P_\ell\beta_{\ell\nu}$$

$$(2.14)$$

В силу $(2.12)$, $(2.14)$ систему $(2.10)-(2.11)$ можно переписать в виде

$$\tilde q_j(\bar\alpha)=\tilde q_j,\qquad j=1,\dots,K_1, \qquad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n}P_j\beta_{j\nu}=\tilde{\tilde P}_\nu,\qquad \nu=1,\dots,K_2. \qquad (2.11)'$$

Можно убедиться, что система $(2.10)-(2.11)$ имеет решение

$$\tilde P_j=\tilde P_j^{\circ}=\tilde P_j^{\circ}(\bar{\bar\alpha}),\qquad \tilde{\tilde q}_i=\tilde{\tilde q}_i^{\circ}=\tilde{\tilde q}_i^{\circ}(\bar{\bar\alpha})$$

где $\bar{\bar\alpha}=\bar{\bar\alpha}(\tilde{\tilde y}_{K_2})$ - решение системы

$\tilde{\tilde P}_j(\alpha)=\tilde{\tilde P}_j\ (j=1,\dots,K_2)$, $\tilde{\tilde q}_i(\alpha)=\tilde{\tilde q}_i\ (i=K_2+1,\dots,n)$.

Пусть далее $D_{K_1,K_2}(\bar{\bar\alpha})$ - определитель матрицы $A(\bar{\bar\alpha})$ вторых производных фазы интеграла $(2.9)$ Из формулы $(2.8)$ следует, что при $\tilde y_{K_2}$ таком, что $\alpha(\tilde{\tilde y}_{K_2})$ - неособая точка,

$$\lim_{h\to 0}\Phi^{\tilde{\tilde q}_{K_2}}\Phi^{\tilde P_{K_1}}\tilde I_{K_1}<\infty$$

Следовательно (см. утверждение §2 п.6 на стр. 377 ), $D_{K_1,K_2}(\alpha(\tilde{\tilde y}_{K_2}))\neq 0$ и метод стационарной фазы применим.

Отсюда и из соотношения (2.8) следует, что в неособых точках $\bar{\bar{\alpha}}$

$$\left| D_{K_1,K_2}(\bar{\bar{\alpha}}) \right| = \left| \frac{\tilde{\tilde{\mathcal{J}}}_{K_2}(\bar{\bar{\alpha}})}{\tilde{\mathcal{J}}_{K_1}(\bar{\bar{\alpha}})} \right| \qquad (2.15)$$

Отсюда по непрерывности получаем, что это равенство сохраняется и в особых точках $\alpha \in \tilde{\Omega}_{K_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{K_2}$.

Значит, $D_{K_1,K_2}(\bar{\bar{\alpha}}) \neq 0$ при $\bar{\bar{\alpha}} \in \tilde{\Omega}_{K_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{K_2}$

С помощью метода стационарной фазы получаем

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{K_2}) = e^{-\frac{i\pi}{2}m}\, \tilde{\tilde{I}}_{K_2},$$

где $m = \mathcal{J}nd\ A(\bar{\bar{\alpha}}) - K_2$.

Из (2.15) следует, что $D_{K_1,K_2}(\bar{\bar{\alpha}})$ не обращается в нуль на пересечении карт $\tilde{\Omega}_{K_1}$ и $\tilde{\tilde{\Omega}}_{K_2}$. Следовательно, $\mathcal{J}nd\ A(\alpha)$ не меняется при $\alpha \in \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2}$.

Лемма доказана.

Следствие. Разность $\tilde{\gamma}_{K_1} - \tilde{\tilde{\gamma}}_{K_2}$ равна $m$ для всех неособых $\alpha \in \tilde{\Omega}_{K_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{K_2}$.

Отсюда, поскольку $m$ не зависит от $\alpha \in \tilde{\Omega}_{K_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{K_2}$, то

$$\left[\tilde{\tilde{\gamma}}_{K_2} - \tilde{\gamma}_{K_1}\right](\alpha_1) = \left[\tilde{\tilde{\gamma}}_{K_2} - \tilde{\gamma}_{K_1}\right](\alpha_2)$$

для любых неособых точек $\alpha_1$ и $\alpha_2$, принадлежащих пересечению $\tilde{\Omega}_{K_1}$ и $\tilde{\tilde{\Omega}}_{K_2}$

Следовательно,

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_{K_2}(\alpha^1) - \tilde{\tilde{\gamma}}_{K_2}(\alpha^2) = \tilde{\gamma}_{K_1}(\alpha^1) - \tilde{\gamma}_{K_1}(\alpha^2) = \mathcal{J}n\nu.$$

Мы доказали, что индекс пути из $\alpha^1$ в $\alpha^2$ является инвариантом, не зависящим от того, в какую карту попали точки $\alpha^1$ и $\alpha^2$. Отсюда следует теорема 2.1 о гомотопической инвариантности индекса пути I/.

2. <u>Доказательство теоремы 2.3</u>. Обозначим через $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}[\mathcal{X},\mathcal{H},\{e^j\},\{\ell^j\}]$ канонический оператор вида (2.3) гл.2, зависящий от покрытия $\mathcal{H}$, совокупности центров $\mathcal{X}$, разбиения единицы $\{e^j\}$ и путей $\{\ell^j\}$. Нетрудно убедиться, что в силу гомотопической инвариантности в малом $\int p\,dq$ и $\operatorname{Ind}\ell[\alpha^0,\alpha]$ выполнение условий (2.5) гл.2 необходимо и достаточно для того, чтобы (в фактор-пространстве) оператор $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ однозначным образом определялся данным атласом $\mathcal{H}$, центрами $\mathcal{X}$ и данным разбиением единицы. Таким образом,

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}[\mathcal{X},\mathcal{H},\{e^j\},\{\ell^j\}]\sim K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}[\mathcal{X},\mathcal{H},\{e^j\},\{\tilde{\ell}^j\}]$$

и мы можем оператор (2.3) гл.2 обозначить через $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}[\mathcal{X},\mathcal{H},\{e^j\}]$.

Прежде чем переходить к доказательству независимости канонического оператора от разбиения единицы, докажем лемму.

Лемма 7.5 Пусть области $\Omega^i=\Omega^i(\beta)$, $i=1,\dots,N$ элементы покрытия $\mathcal{H}(\beta)$ с совокупностью центров $\mathcal{X}(\beta)$ и $\tilde{e}^i(\alpha)=\tilde{e}^i(\alpha,\beta)$ (элементы разложения единицы) зависят от некоторого параметра $\beta\in[0,\varepsilon]$, так что каждая область $\Omega^i(\beta)$ при всех $\beta\in[0,\varepsilon]$ взаимно однозначно проектируется на одну и ту же плоскость $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n$, а $e^i(\alpha,\beta)$ дважды дифференцируема по $\beta$. Тогда

---

I/. По определению, $\operatorname{Ind}\ell[\tilde{\alpha}_{k_1},\tilde{\alpha}_{k_2}]=m$, где $\alpha_{k_1},\tilde{\alpha}_{k_2}$ – центральные точки карт $\tilde{\Omega}_{k_1}$, $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\left\{\mathscr{X}(\beta),\mathscr{H}(\beta),\{\tilde e^i(\alpha,\beta)\}\right\}\varphi(\alpha)=0.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для точки $\beta=0$. Пусть $\tilde e_\kappa^j(\alpha,\beta)$ – элемент разложения единицы, отвечающий некоторой карте $\tilde\Omega_\kappa^j(\beta)$, и пусть карта $\tilde\Omega_\kappa^j(\beta)$ пересекается только с $\ell$ картами $\tilde{\tilde\Omega}_{\kappa_i}^i(\beta)$, $i=1,\dots,\ell$. Рассмотрим

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\sum_{j=1}^{N}\tilde e_\kappa^j(\alpha,0)\varphi(\alpha) \qquad (2.16)$$

Докажем, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta}K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\tilde e_\kappa^j(\alpha,0)\varphi(\alpha)\right]_{\beta=0}=0$$

Имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta}K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\tilde e_\kappa^j(\alpha,0)\varphi(\alpha)\right]_{\beta=0}=\left\{\Phi^{\tilde p_\kappa}e^{-\frac{i\tilde\gamma_\kappa^j\pi}{2}}\tilde I_\kappa\frac{\partial\tilde e_\kappa^j(\alpha,\beta)}{\partial\beta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\ell}\Phi^{\tilde{\tilde p}_{\kappa_\nu}}e^{-\frac{i\tilde{\tilde\gamma}^\nu\pi}{2}}\tilde{\tilde I}_{\kappa_\nu}\frac{\partial\tilde{\tilde e}^\nu(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right\}\tilde e_\kappa^j(\alpha,0) \qquad (2.17)$$

Здесь $\tilde{\tilde e}^\nu$ и $\tilde{\tilde I}_{\kappa_\nu}$ отвечают картам $\tilde{\tilde\Omega}_{\kappa_\nu}^\nu(\beta)$, а

$$\Phi^{\tilde{\tilde p}_{\kappa_\nu}}f(\alpha)\equiv\Phi^{\tilde{\tilde p}_{\kappa_\nu}}f[\alpha(\tilde{\tilde y}_{\kappa_\nu})].$$

В силу лемм 7.3 и 7.4

$$\Phi^{\tilde p_\kappa}\exp\left(-i\frac{\tilde\gamma_\kappa\pi}{2}\right)\tilde I_\kappa\,\partial\tilde{\tilde e}^\nu(\alpha,\beta)/\partial\beta\big|_{\beta=0}\tilde e_\kappa^j(\alpha,0)=$$

$$=\exp\left(-i\frac{\tilde{\tilde\gamma}_\kappa\pi}{2}\right)\Phi^{\tilde{\tilde p}_\kappa}I_{\kappa_\nu}\,\partial\tilde{\tilde e}^\nu(\alpha,\beta)/\partial\beta\big|_{\beta=0}\tilde e_\kappa^j(\alpha,0), \qquad (2.18)$$

$\nu=1,\dots,\ell$ при $\alpha\in\tilde\Omega_\kappa^j(\beta)\cap R$

Поскольку

$$\tilde e_\kappa^j(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{\ell}\tilde{\tilde e}^i(\alpha,\beta)=1,$$

то $\partial\left[\tilde{e}^{i}_{k}(\alpha,\beta)+\sum\limits_{i=1}^{\ell}\tilde{\tilde{e}}^{i}(\alpha,\beta)\right]/\partial\beta=0$ в указанных точках.

Отсюда, из (2.17) и (2.18) следует утверждение леммы.

Пусть $\bar{\mathcal{H}}$ и $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$ - атласы с одной и той же совокупностью центров $\mathcal{X}$, т.е. одной центральной точке $\alpha^{i}$ отвечают области $\bar{\Omega}^{i}\in\bar{\mathcal{H}}$ и $\bar{\bar{\Omega}}^{i}\in\bar{\bar{\mathcal{H}}}$. Рассмотрим атлас $\mathcal{H}$ с центрами $\mathcal{X}$ и областями $\Omega^{i}=\bar{\Omega}^{i}\cup\bar{\bar{\Omega}}^{i}$. Им отвечают разложения единицы $\{e^{i}(\alpha)\}$, $\{\bar{e}^{i}(\alpha)\}$ и $\{\bar{\bar{e}}^{i}(\alpha)\}$. Рассмотрим разложение единицы $\{e^{i}(\alpha,\beta)\}$, где

$e^{i}(\alpha,\beta)=[\bar{e}^{i}(\alpha)+\beta e^{i}(\alpha)](1+\beta)^{-1}$,

отвечающее покрытию $\Omega^{i}(\beta)$, где $\Omega^{i}(\beta)=\Omega^{i}$ при $\beta\in(0,1]$ и $\Omega^{i}(0)=\bar{\Omega}^{i}$. В силу леммы 7.5 получаем, что канонический оператор не меняется (в фактор-пространстве $\mathcal{S}$) от замены атласа $\mathcal{H}$ на $\bar{\mathcal{H}}$. Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и относительно атласа $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$. Следовательно, замена атласа $\bar{\mathcal{H}}$ на $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$ сказывается в каноническом операторе лишь на величинах эквивалентных нулю. Поэтому мы можем записать $K^{\gamma,\alpha^{0}}_{A,\Gamma}[\mathcal{X},\mathcal{H},\{e^{i}\}]=K^{\gamma,\alpha^{0}}_{\Gamma}(\mathcal{X})$.

Пусть теперь дан атлас $\mathcal{H}$. Возьмем некоторую точку $\bar{\alpha}\in R$, $\bar{\alpha}\,\bar{\in}\,\mathcal{X}$. Изменим покрытие $\mathcal{H}$ (сохраняя его центры $\mathcal{X}$) так, чтобы точка $\bar{\alpha}$ принадлежала только одной карте $\tilde{\Omega}^{i_0}_{k}$ нового атласа $\mathcal{H}'$ с теми же самыми центрами $\mathcal{X}$. По доказанному эта процедура оставляет $K^{\gamma,\alpha^{0}}_{A,\Gamma}$ инвариантным. Окружим точку $\bar{\alpha}$ такой областью, которая пересекается только с $\tilde{\Omega}^{i_0}_{k}$ и целиком проектируется на фокальную плоскость, отвечающую $\bar{\alpha}$. Таким образом, мы построим новую карту с центром в точке $\bar{\alpha}$,

обозначим ее через $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{\kappa}^{\omega}$ , а дополненный этой картой атлас $\mathcal{H}$ и дополненное точкой $\tilde{\alpha}$ множество $\mathcal{X}$ соответственно обозначим $\mathcal{H}''$ и $\mathcal{X}''$ . Пусть $\{e_{(1)}^{i}(\alpha)\}$ – – разбиение единицы по атласу $\mathcal{H}'$ , тогда можно построить следующее разбиение единицы $\{e_{(2)}^{i}(\alpha)\}$ по атласу $\mathcal{H}''$ :

$$\begin{cases} e_{(2)}^{i}(\alpha) \equiv e_{(1)}^{i}(\alpha), \\ e_{(1)}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}^{i_0}(\alpha) + e_{(2)}^{\omega}(\alpha) \quad \text{при} \quad i \neq i_0 . \end{cases}$$

Рассмотрим разность выражений $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ , соответствующих атласам $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ с разбиениями единицы $e_{(1)}^{i}$ и $e_{(2)}^{i}$ соответственно. Очевидно, что

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}(\mathcal{X})\varphi(\alpha) - K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}(\mathcal{X}'')\varphi(\alpha) = \exp\left(i\gamma - \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0;\alpha^{i_0}]\right] \times$$

$$\times\, \Phi^{\tilde{p}_\kappa}\left[e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha)\right]\tilde{I}_\kappa - \exp\left\{i\gamma - \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0;\alpha^{\omega}]\right\}\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{\kappa'}}e_{(2)}^{\omega}(\alpha)\tilde{\tilde{I}}_{\kappa'}$$

$$(2.19)$$

Так как $e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}^{\omega}(\alpha)$ и носитель $e_{(2)}^{\omega} \in \widetilde{\Omega}_{\kappa}^{i_0} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{\kappa'}^{\omega}$ , то в силу лемм 7.3 и 7.4 разность (2.19) эквивалентна нулю. Следовательно, к центрам $\mathcal{X}$ атласа $\mathcal{H}$ можно добавить новые центральные точки и от этого оператор $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ не будет изменяться . Пусть даны канонические атласы $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ с совокупностями центров $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{X}''$ . Рассмотрим атлас $\mathcal{H}$ с совокупностью центров $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$.

По доказанному,

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathcal{X}] \quad \text{и} \quad K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathcal{X}''] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathcal{X}]$$

следовательно, $K_{\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathcal{X}'']$,
что и требовалось.

Теорема 2.4 доказывается аналогично, при учете, что в леммах 7.2 - 7.4 метод стационарной фазы дает асимптотические ряды по степеням $R_z$.

3. <u>Доказательство теоремы 2.2</u> Пусть $\Gamma_0$ и $\Gamma_t$ - лагранжевы многообразия, причем $\Gamma_0$ может быть непрерывно деформировано в $\Gamma_t$, так что они включаются в однопараметрическое семейство $\Gamma_\tau$, $0 \le \tau \le t$, где $\Gamma_\tau$ - лагранжево многообразие при любом $\tau$.

Пусть, как обычно, $\mathcal{H}_0$ - канонический атлас начального лагранжева подмногообразия $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$. Обозначим через $\mathcal{U}_{\tau_1,\tau_2}$ отображение подмногообразия $\Gamma_{\tau_1}$ на $\Gamma_{\tau_2}$: $\mathcal{U}_{\tau_1,\tau_2}\Gamma_{\tau_1} = \Gamma_{\tau_2}$, через $\mathcal{H}_\tau$ - канонический атлас подмногообразия $\Gamma_\tau$.

Пусть $\Omega^j$ отвечает карте $\tilde{\Omega}^j_k \subset \mathcal{H}_0$.
По определению карты $\tilde{\Omega}^j_k$, область $\Omega^j$ взаимно однозначно проектируется на плоскость $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n$
Положим $\Omega^j_{\tau_0} = \mathcal{U}_{0,\tau_0}\Omega^j$. Очевидно, что при $\tau_0 < \varepsilon$ область $\Omega^j_{\tau_0}$ также будет взаимно однозначно проектироваться на ту же плоскость. Поскольку областей $\Omega^j$ конечное число, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\tau_0 < \varepsilon$ во всех областях $\Omega^j_{\tau_0}$ можно ввести те же локальные координаты $\tilde{y}_k$, что и в их прообразах $\Omega^j$. Таким образом, в качестве атласа $\mathcal{H}_{\tau_0}$ на $\Gamma_{\tau_0}$ можно взять совокупность локальных карт $(\Omega^i_{\tau_0})_k = \mathcal{U}_{0,\tau_0}\tilde{\Omega}^i_k$, отвечающих областям $\tilde{\Omega}^i_{\tau_0}$ и координатам $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n$ так, что при $\tau_0 \le \varepsilon$ можно по опре-

делению писать $\mathcal{H}_{\tau_0} = \mathcal{U}_{0,\tau_0}\mathcal{H}_0$.

В силу леммы Бореля конечный интервал $[0,t]$ мы можем разбить (точками $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m = t$ ) на конечное число интервалов длины $\Delta$, обладающих следующим свойством: на $\Gamma_{\tau_i}$ может быть выбран такой атлас $\mathcal{H}^i_{\tau_i}$, что $\mathcal{H}^i_{\tau} = \mathcal{U}_{\tau_i,\tau}\,\mathcal{H}^i_{\tau_i}$ - атлас при $\tau_i \le \tau \le \tau_{i+1}$. В свою очередь на $\Gamma_{\tau_{i+1}}$ может быть выбран такой атлас $\mathcal{H}^{i+1}_{\tau_{i+1}}$, вообще говоря, отличный от атласа $\mathcal{H}^i_{\tau_{i+1}} = \mathcal{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}}\mathcal{H}^i_{\tau_i}$, что $\mathcal{H}^{i+1}_{\tau} = \mathcal{U}_{\tau_{i+1},\tau}\,\mathcal{H}^{i+1}_{\tau_{i+1}}$ атлас при $\tau_{i+1} \le \tau \le \tau_{i+2}$.

Рассмотрим цикл $\gamma_{\tau_i}$ на подмногообразии $\Gamma_{\tau_i}$. Докажем инвариантность $\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i}$ относительно деформации $\Gamma_{\tau_i} \to \Gamma_{\tau_{i+1}}$, т.е. докажем, что при этой деформации

$$\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i} = \operatorname{Ind}\gamma_{\tau_{i+1}}.$$

Поскольку мы доказали инвариантность $\operatorname{Ind}\gamma$ при переходе от одного атласа к другому, то тем самым будет доказана инвариантность индекса любого цикла относительно деформации $\Gamma \to \Gamma_t$.

Вначале допустим, что цикл $\gamma_{\tau_i}$ можно деформировать на $\Gamma_{\tau_i}$ таким образом, чтобы он не проходил подряд через две особые карты атласа $\mathcal{H}^i_{\tau_i}$. Рассмотрим отрезок $\ell_{\tau_i} = \ell_{\tau_i}[\alpha^1, \alpha^2]$ цикла $\gamma_{\tau_i}$, лежащий целиком в трех картах $\Omega^1, \tilde{\Omega}_k, \Omega^2$, где $\tilde{\Omega}_k$ - особая, а $\Omega^1$ и $\Omega^2$ - неособые карты.
Карты $\mathcal{U}_{\tau_i,\tau}\,\Omega^\sigma$ $(\sigma=1,2)$, $\mathcal{U}_{\tau_i,\tau}\tilde{\Omega}_k$ при $\tau_i \le \tau \le \tau_{i+1}$ мы будем обозначать снова через $\Omega^\sigma$ $(\sigma=1,2)$, $\tilde{\Omega}_k$ соответственно.

Рассмотрим отрезок $\mathcal{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}} \ell_{\tau_i} = \ell_{\tau_{i+1}} \subset \gamma_{\tau_{i+1}}$

Докажем, что $\operatorname{Ind} \ell_{\tau_i} = \operatorname{Ind} \ell_{\tau_{i+1}}$.

Тем самым будет доказана инвариантность $\operatorname{Ind} \gamma_{\tau_i}$, поскольку по построению величина индекса может изменяться лишь при переходе через особые точки. В силу этого замечания, не уменьшая общности, мы можем предположить, что $\alpha^1, \alpha^2 \in \widetilde{\Omega}_k$ т.е. $\alpha^1 \in \widetilde{\Omega}_k \cap \Omega^1$, а $\alpha^2 \in \widetilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$.

На каждом из пересечений $\widetilde{\Omega}_k \cap \Omega^1$, $\widetilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$ якобиан $D\widetilde{y}_0 / D\widetilde{y}_k$ по определению карт $\Omega^{1,2}$ и $\widetilde{\Omega}_k$ не обращается в нуль. По построению он отличен от нуля и в точках $\mathcal{U}_{\tau_i,\tau} \alpha^\sigma$ $(\sigma = 1,2)$, $\tau_i \le \tau \le \tau_{i+1}$.

Следовательно, и равный ему детерминант матрицы $\widetilde{B}_k = \| \partial \widetilde{q}_i / \partial \widetilde{p}_j \|_{i,j \le k}$ отличен от нуля в этих точках.

Поэтому индекс инерции матрицы $\widetilde{B}_k$ не меняется при переходе от $\alpha^\sigma \subset \Gamma_{\tau_i}$ к $\mathcal{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}} \alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$. Следовательно, $\operatorname{Ind} \ell_{\tau_i} = \operatorname{Ind} \ell_{\tau_{i+1}}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай. Деформируем цикл $\gamma_{\tau_i}$ и цикл $\gamma_{\tau_{i+1}}$ таким образом, чтобы они проходили через центральные точки всех карт, которые эти циклы пересекают. Рассмотрим отрезок цикла $\gamma_{\tau_i}$, проходящий из центральной точки $\widetilde{\alpha}_{k_1}$ карты $\widetilde{\Omega}_{k_1}$ в центральную точку $\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{k_2}$ карты $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$ на многообразии $\Gamma_{\tau_i}$. Рассмотрим соответствующий отрезок пути цикла $\gamma_{\tau_{i+1}}$ из центральной точки $\widetilde{\alpha}'_{k_1} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ карты $\widetilde{\Omega}'_k = \mathcal{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}} \widetilde{\Omega}_{k_1}$ в центральную точку $\widetilde{\widetilde{\alpha}}'_{k_2} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ карты $\widetilde{\widetilde{\Omega}}'_{k_2} = \mathcal{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}} \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{k_2}$.

Докажем, что индексы этих путей совпадают. Отсюда, очевидно, будет следовать, что индекс цикла $\gamma_{\tau_i}$ равен индексу цикла $\gamma_{\tau_{i+1}}$.

Напомним, что мы определили индекс пути из неособой точки $\alpha^1$ карты $\widetilde{\Omega}_K$ в центральную точку $\widetilde{\alpha}_K$ этой же карты как индекс инерции матрицы $\widetilde{B}_K$ в точке $\alpha^1$.

Пусть $\alpha^1 \in \widetilde{\Omega}_{K_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{K_2}$ и является неособой, а $\widetilde{\alpha}_{K_1}$ и $\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{K_2}$ – центральные точки карт $\widetilde{\Omega}_{K_1}$ и $\widetilde{\widetilde{\Omega}}_{K_2}$ соответственно. Очевидно, что $Ind\, \ell[\widetilde{\alpha}_{K_1}, \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{K_2}] = -Ind\, \ell[\alpha^1, \widetilde{\alpha}_{K_1}] + Ind\, \ell[\alpha^1, \widetilde{\widetilde{\alpha}}_{K_2}]$. Таким образом, индекс пути из $\widetilde{\alpha}_{K_1}$ в $\widetilde{\widetilde{\alpha}}_{K_2}$ равен разности индексов инерции матриц $\widetilde{B}_{K_1}$ и $\widetilde{\widetilde{B}}_{K_2}$, взятых в точке $\alpha^1 \in \widetilde{\Omega}_{K_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{K_2}$. По доказанному в лемме 7.4 эта разность равна индексу инерции матрицы $A(\alpha^1)$.

Заметим, что мы всегда можем считать, что многообразия $\Gamma_{\tau_i}$ и $\Gamma_{\tau_{i+1}}$ находятся в общем положении. Однако, при некоторых $\tau \in \{\tau_i \le \tau \le \tau_{i+1}\}$ многообразие может и не находиться в общем положении.[1]

Пусть $\alpha^0 \in \widetilde{\Omega}_{K_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{K_2}$ и лежит на $\gamma_{\tau_i}$, а $\alpha_1^0 = \mathcal{U}_{\tau_i, \tau_{i+1}} \alpha^0$ лежит на $\gamma_{\tau_{i+1}}$, причем точки $\alpha^0$ и $\alpha_1^0$ неособые. Докажем, что индексы инерции матрицы $A(\alpha)$ в точках $\alpha^0$ и $\alpha_1^0$ совпадают. Этим и в силу сказанного выше и будет исчерпано доказательство инвариантности индекса цикла $\gamma_{\tau_i}$.

Равенство $(2.15)$, доказанное для случая, когда многообразие особенностей $M$ имеет размерность не более чем $n-1$ по непрерывности продолжается на общий случай. Поэтому $\det A(\alpha)$ не обращается в нуль на пересечении карт $\widetilde{\Omega}_{K_1} \cap \widetilde{\widetilde{\Omega}}_{K_2}$, а также вдоль пути $\mathcal{U}_{\tau_i, \tau} \alpha$ при $\tau_i \le \tau \le \tau_{i+1}$. Следовательно, вдоль этого пути индекс инерции матрицы $A(\alpha)$ не изменяется (в противном случае $\det A(\alpha)$ обратился бы в нуль), что и требовалось. Отсюда следует и аналог теоремы 2.1 для плёнки.

## § 3. Асимптотика решения в большом.

1. Мы здесь докажем теорему 4.1 в случае $m = 1$ и $\Lambda_1 = 1$ т.е. теорему 4.1а. В общем случае произвольного $m$ эта теорема и теорема 4.2 доказываются совершенно аналогично.

Прежде всего покажем, что теорема 4.1а непосредственно следует из утверждений, доказанных в теореме 6.2 при условии, что время $t$ достаточно мало (т.е. теорема 4.1а справедлива в малом). Для этого получим из формулы (3.37) гл. 6 формулу (2.12) гл. 4. Предположим, что носитель вектор-функции $\varphi^{\circ}(\alpha, h)$ (см. теорему 4.1а), принадлежит области $\Omega^{i}$. В силу (2.13) гл. 4 носитель вектор-функции $\varphi(\alpha, t, h)$ будет принадлежать $\Omega^{i}_{t}$. Поэтому выражение (2.12) в этом случае в силу определения канонического оператора может быть записано в форме (3.37) гл. 6 при учете равенства

$$S(p,x,t) = \int\limits_{\ell[\alpha^{\circ};\alpha^{\circ}_{t}]} \{-H dt + p dq\} + \int\limits_{\ell[\alpha^{\circ}_{t}, \alpha_{t}(\tilde{y}_{k})]} \tilde{p}\, d\tilde{q} - \sum_{l=1}^{k} \tilde{p}_{l} \tilde{q}_{l} [\alpha_{t}(\tilde{y}_{k})].$$

Но формула (3.37) получена в предположении, что

$$D\left[\tilde{P}_{1}(\alpha,t), \dots, \tilde{P}_{k}(\alpha,t), \tilde{Q}_{k+1}(\alpha,t), \dots, \tilde{Q}_{n}(\alpha,t)\right] / D\alpha$$

не обращается в нуль, т.е. при $t \le \varepsilon$. Поскольку канонический оператор может быть разложен на конечную сумму выражений вида (3.37), то мы получаем утверждение теоремы 4.1а при $t \le \varepsilon$. Все эти рассуждения, разумеется, могу быть отнесены к произвольному начальному моменту $t_0$. Решение $Q(\alpha,t)$, $P(\alpha,t)$ задачи (2.4) – (2.5) гл. 4 задает отображение $\mathcal{U}_{0,t}$ подмногообразия $\Gamma_0$ на подмногообразие $\Gamma_t$.

Применим к отображению $\mathcal{U}_{0,T}$ построение, приведенное в начале доказательства теоремы 2.2 (см. п. 3 § 2), и

разобьем отрезок $[0,T]$ на интервалы $t=0, t_1, t_2, \dots, T$.
Мы сохраним введенные там обозначения: $\mathcal{H}_t^0 = U_{0,t}\, \mathcal{H}^0$ при $t \le t_1$; $\mathcal{H}_t^i = U_{t_i,t}\, \mathcal{H}_{t_i}^i$ при $t_i \le t \le t_{i+1}$.
Пусть при $t=0$ решение уравнения (2.11) гл. 4 удовлетворяет условию (2.11а) гл. 4. По доказанному, при $t \le t_1$ это решение можно представить в виде (2.12) гл. 4, где $\alpha_t^0 = \alpha^0$, $\operatorname{Ind} \ell[\alpha^0; \alpha_t^0] = 0$, $\mathcal{H}[\Gamma_t] = \mathcal{H}_t^0$.
Таким образом,

$$\psi(x,t) = K_{1/h,\Gamma_t,h}^{\gamma,\alpha^0} [\mathcal{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu X^\nu.$$

Заметим, что из условий теоремы 4.4а следует, что решение уравнения (2.11), удовлетворяющее начальному условию, эквивалентному нулю, эквивалентно нулю.

Для решения уравнения (2.11) вновь поставим начальное условие вида

$$\psi(x,t_1) = K_{1/h,\Gamma_t,h}^{\gamma,\alpha^0} [\mathcal{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu X^\nu \tag{3.1}$$

при $t = t_1$.
В силу единственности решения (см. условие теоремы 4.1) мы получим при $t \ge t_1$ решение $\psi(x,t)$ задачи (2.11), (2.11а).

Перейдем в начальном условии (3.1) к другому атласу $\mathcal{H}_{t_1}^1$, тогда мы получим с точностью до функции, эквивалентной нулю,

$$\psi(x,t) = K_{1/h,\Gamma_t,h}^{\tilde{\gamma},\alpha_1^0} [\mathcal{H}_{t_1}^1] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu X^\nu,$$

где $\alpha_1^0$ – начальная точка $\mathcal{H}_{t_1}^1$, а $\tilde{\gamma} = \frac{1}{h} \int_{\ell[\alpha^0;\alpha_1^0]} p\,dq + \gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} \ell[\alpha^0, \alpha_1^0]$. Как было замечено, решение уравнения

при $t > t_1$ от этого не изменится с точностью до функции, эквивалентной нулю. Поэтому получим

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha_1^0}_{1/h,\Gamma_t,h}[\mathcal{H}_t^1] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu X^\nu$$

при $t_1 \leq t \leq t_2$.

Продолжая этот процесс по индукции, придем к утверждению теоремы 4.1а.

2. Доказательство теоремы 4.4. Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 4.1, рассмотрим

$$K^{\tilde{\gamma}_t,\alpha_t^0}_{1/h,\Gamma_t(E^j)}[\mathcal{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha,t) X^\nu(\alpha)$$

при $t \leq t_1$, где

$$\alpha_t^0 = \mathcal{U}_{0,t}^{-1}\alpha^0, \quad \tilde{\gamma}_t = \int_{\ell[\alpha^0,\alpha_t^0]} p\,dq - H\,dt, \quad \varphi_\nu(\alpha,t) = \xi_\nu(\alpha) e^{i\mu t}, \quad \mu = \mu(E^j)$$

В силу (3.25) гл. 6 при $N=1$, $i=0$ (см. также замечание в начале этого параграфа), поскольку $\mathrm{Ind}\,\ell[\alpha^0,\alpha_t^0]=0$ по построению, имеем

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}\right) K^{\tilde{\gamma}_t,\alpha_t^0}_{1/h,\Gamma_t(E^j)}(\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha,t) X^\nu(\alpha) = h^2 z(x,t,h),$$

где $z(x,t,h) \in L_2(B^1; C_2)$ – пространству непрерывных по $t$ и $h$ и квадратично интегрируемых функций, $x \in R_n$ со значениями в $B^1$. В дальнейшем буквами $z_1, z_2, z_3, \ldots$, мы будем обозначать функции из $L_2[B^1; C_2]$

Очевидно, что

$$K^{\tilde{\gamma}_t,\alpha_t^0}_{1/h,\Gamma_t(E^j)}(\mathcal{H}_t^0) = e^{-\frac{iE^j t}{h}} K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}(\mathcal{H}_t^0)$$

поскольку $\Gamma_t(E^j) = \Gamma(E^j)$, $H = E^j$, точка $\alpha_t^0$ на подмногообразии $\Gamma_t(E^j)$ совпадает с точкой $\alpha^0$ на

подмногообразии $\Gamma$ в объемлющем евклидовом пространстве, и, следовательно, $\tilde{\gamma}_t = -\int\limits_{\ell[\alpha^0_t;\alpha^0_t]} H\,dt = -E^{\Lambda} t.$

Поскольку условия теоремы 2.3 в силу 4.1 гл. 4 выполнены, мы можем применить лемму 7.5 и на основании ее получить

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}(\mathcal{H}^0_t) = h z_1(x,t,h).$$

Поэтому

$$-ih\frac{\partial}{\partial t} K^{\gamma_t,\alpha^0_t}_{1/h,\Gamma_t(E^j)}(\mathcal{H}^0_t)\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t)X^\nu(\alpha) =$$

$$= -ih\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{-\frac{iE^j t}{h}} K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}(\mathcal{H}^0_t)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)X^\nu(\alpha)e^{i\mu t}\right\} =$$

$$= (-E^j + h\mu)e^{i(\mu-\frac{E^j}{h})t} K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}(\mathcal{H}^0_t)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)X^\nu(\alpha) = h^2 z_2.$$

Отсюда

$$[\hat{L} - E^j + h\mu]\, K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}(\mathcal{H}^0_t)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)X^\nu(\alpha) = h^2 z_3, \qquad (3.2)$$

причём либо $E^j - h\mu(E^j)$ является точкой спектра оператора $\hat{L}$, либо

$$\left\| K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}(\mathcal{H}^0_t)\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)X^\nu(\alpha)\right\|_{L_2} = h^2\left\|[\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} z_3\right\|_{L_2} \leq \left\|[\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1}\right\|_{L_2}\cdot\|z_3\|,$$

где $\|\ \|_{L_2}$ - норма в $L_2[B^1]$. Поскольку $\|(\hat{L} - E^j + h\mu)^{-1}\|_{L_2} \leq \frac{1}{d}$, где $d$ - расстояние от точки $E^j - h\mu$ до спектра оператора $\hat{L}$, то отсюда получаем, что $d \leq O(h^2)$, что и требовалось.

Заметим, что соотношение $(3.2)$ приводит также с помощью леммы 2.4 т.1 теории возмущений к асимптотике спектральной функции $E_{\Delta\lambda}$ интервала $\Delta\lambda \sim O(h)$ оператора $\hat{L}$, а именно

$$\left\| \left[1 - E_{\Delta\lambda}\right] K^{\gamma,\alpha^0}_{\Lambda\Gamma(E^j)} \sum_{\nu=1}^{\tau} \varphi_\nu(\alpha) X^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[B']} = O(h) \qquad (3.3)$$

где

$$\Delta\lambda = \{ E^j - o(h) ; E^j + o(h) \}.$$

Теорема доказана.

3. Из теоремы 4.4 непосредственно следуют теоремы 3.1, 3.6 и 3.6а. Из теорем 4.1, 4.1а, 4.2 при учете теорем 5.2а, 5.3, 5.5а, 5.6а следуют теоремы 3.3 и 3.4 (последняя теорема для уравнений 3 и 4 таблицы 2).

Очевидно, что для гиперболической системы условие 1), § 2, гл. 4 выполняется, если в качестве пространства $B^\infty$ взять конечномерное пространство. Известно, что из условий теорем 3.4 (для уравнений 1 и 2 таблицы 2), 3.5 и 4.3, следует условие 2) § 2 гл. 4 (см. /25/, /49/, /38/, /59,1,2)/ ). Из леммы 2 дополнения и условий теорем 3.4, 3.5 и 4.3 следует существование при любом времени $t$ решения задачи Коши для соответствующих бихарактеристических уравнений. Таким образом, все требования теоремы 4.2 выполняются при осуществлении условий теорем 3.4, 3.5 и 4.3.

# ГЛАВА 8. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ С $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ РАЗА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Задача квазиклассической асимптотики в целом, т.е. в случае, когда траектории пучка пересекаются, является весьма сложной, и даже в физической литературе не было никаких подходов к решению этой проблемы. Аналогичная проблема в оптике была исследована в частных примерах лишь в физической литературе (о переходе волны через каустику см. напр. в книге Ландау и Лившица "Теория поля"). По аналогии с оптикой априори можно было заключить, что, если траектории пересекаются, и в одну точку $x$ в момент времени $t$ приходят $k$ траекторий, то этому отвечают $k$ различных волн, которые интерферируют в точке $x$. Эта интерференция зависит существенно от множителя вида $\exp -\frac{i\pi\gamma_j}{2}$, который стоит при $j$--той волне. Эти соображения приводятся в [27]. Там же указано, что из априорных соображений нельзя угадать величину $\gamma_j$. В случае оптической задачи в пустоте с отражающими зеркалами величина $\gamma_j$ зависит от числа отражений, которые претерпела $j$-ая траектория.

Мы видели, что для асимптотики решений уравнений квантовой механики роль таких отражающих зеркал играют огибающие семейства (пучка) траекторий классических частиц.

При этом как указывалось в главе 2 величина $\gamma_j$ оказывается равной так называемому индексу Морса $j$- той траектории.

Этот индекс был введен М.Морсом при изучении вариационной задачи для функционала и определен как число отрицательных собственных значений второй вариации функционала [53]. Теория Морса сыграла существенную роль в развитии топологии дифференцируемых многообразий [52] и в изучении задачи о числе геодезических, соединяющих две точки (вариационное исчисление в целом)[31]. Здесь мы видим, что индекс Морса имеет конкретное физическое содержание. Этот факт является новым успехом теории Морса.

В предыдущей главе мы уже получили значение $\gamma_j$, однако, еще не доказали, что значение $\gamma_j$ совпадает с индексом Морса. Кроме того мы и требовали, чтобы коэффициенты уравнения были бесконечно дифференцируемы. Большая гладкость коэффициентов существенна даже для получения первого члена квазиклассической асимптотики с помощью метода, который был дан выше. Но вопрос об установлении такой минимальной гладкости коэффициентов, при которой $\gamma_j$ равно индексу Морса, является принципиальным. Легко проверить на конкретных примерах в одномерном случае, что для разрывных коэффициентов величина $\gamma_j$ отлична от индекса Морса.

Мы даём в этой главе вывод формулы квазиклассической асимптотики, существенно отличный от вывода, данного в предыдущей главе. Требование на гладкость коэффициентов уравнения оказывается при этом новом доказательстве зависящим от степени гладкости функций в интеграле вида:

$$I(h) = \int \varphi(x,y)\, e^{\frac{i}{h}F(x,y)}\, dx ,$$

достаточной для утверждения: "Если уравнение $d\mathcal{F}=0$ имеет единственное решение $x=x_0$, форма $d^2\mathcal{F}$ при $x=x_0$ невырождена и имеет индекс инерции $\gamma$, то справедливо соотношение

$$\int \varphi(x,y)e^{\frac{i\mathcal{F}(x,y)}{h}}dx=(2\pi ih)^{n/2}|D|^{-1/2}e^{-\frac{i\pi}{2}\gamma}e^{i\mathcal{F}(x_0)}\varphi(x_0)+z_h(y),$$

где $z_h(y)$ сильно сходится к нулю в $L_2$ при $h\to 0$, а $D$ - дискриминант формы $d^2\mathcal{F}$ в точке $x_0$".

В методе, который дан в предыдущей главе, требование на гладкость коэффициентов уравнения, зависит от степени гладкости функций $\varphi(x,y)$ и $\mathcal{F}(x,y)$, которая достаточна для получения второго члена асимптотики в методе стационарной фазы.

По-видимому, утверждение, взятое в кавычки и доказанное в гл. 6, может быть улучшено. Вероятно, можно требовать, чтобы функции $\varphi(x,y)$ и $\mathcal{F}(x,y)$ принадлежали пространствам $W_2^{[\frac{n}{2}]}$ (вместо $C^{[\frac{n}{2}]+1}$) и $W^{[\frac{n}{2}]+3}$ (вместо $C^{[\frac{n}{2}]+4}$), соответственно. Это улучшение теоремы о методе стационарной фазы немедленно повлечет за собой уточнение теорем, которые будут доказаны в этой главе.

Доказательства теорем могут быть обобщены на случай волновых уравнений оптики, а также при дополнительном условии бесконечной дифференцируемости коэффициентов могут быть легко видоизменены так, чтобы все асимптотические оценки имели место в $C^\infty$. Мы проведем доказательство для уравнения (2.I) гл. 3 с коэффициентами, принимающими значения с I по 4 строку таблицы 2 (т.е. уравнения Клейна-Гордона-Фока и Дирака). Будем называть это уравнение для простоты "уравнением Дирака".

## § I. Метод шагов вдоль траектории для получения асимптотики в целом.

Мы будем рассматривать для определенности асимптотику решения задачи Коши для уравнения Дирака. Как мы видели, это решение может быть представлено в виде: $u(x,t,h) = \widetilde{Q}_m^{-1}\{y_1, y_2, 0\}$. Оператор $\widetilde{Q}_m$ и функции $y_1 = y_1(x,h)$, $y_2 = y_2(x,h)$ определены в §3 гл.5 Предположим, что $y_1(x) = u(x,0,h) = \varphi(x)\exp[\frac{i}{h}f(x)]$ где $\varphi(x)$ - финитна, $f(x), \varphi(x) \in C^2$.

Рассмотрим систему $1/h$ - бихарактеристик уравнения Дирака. Она имеет вид:

$$\dot{p}^{\pm} = -\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i^{\pm}}, \quad \dot{x}_i^{\pm} = \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}} \quad i=1,2,\dots n, \quad \dot{S}^{\pm} = -H^{\pm} + \sum_{i=1}^{3} p_i^{\pm}\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}} \quad (1.1)$$

$$H^{\pm} = H^{\pm}(x,p,t) = e\,\Phi(x,t) \mp c\sqrt{\left(p - \frac{e}{c}A(x,t)\right)^2 + m^2c^2} \quad (1.2)$$

Обозначим через $X^{\pm}(x_0,t)$, $P^{\pm}(x_0,t)$, $S_{\pm}(x_0,t)$ решение системы (1.1) с начальными условиями

$$X^{\pm}(0) = x_0; \quad P^{\pm}(0) = \operatorname{grad} f(x_0); \quad S_{\pm}(0) = f(x_0) \quad (1.3)$$

Обозначим через $X^{\pm}(x_0, 0, T)$ совокупность $X^{\pm}(x_0,t)$ при $0 \le t \le T$ (траектория). Пусть $(x_0,t_1);\dots,(x_0,t_k)$ - фокусы[x] на траектории $X^{+}(x_0; 0, T)$. Обозначим через $D_0 = D_0(x_0, \varepsilon_\delta)$ такую $\varepsilon$ - окрестность точки $x_0$, что вне $\delta$ -окрестностей по $\tau$ точек $(x_0,t_1),\dots,(x_0,t_k)$ для всех $x_0 \in D_0$ нет фокусов и в каждую точку вне этих $\delta$ - окрестностей приходит лишь одна траектория. Пусть, далее, $D_t$ и $\Omega_t$ - области значений функций $X^{+}(x_0,t)$ и $P^{+}(x_0,t)$ при $x_0 \in D_0$, $t \in (0,T]$.

---

x/ Фокусом (фокальной точкой) называется точка, в которой $\partial X/\partial x_0 = 0$ Их конечное число (см. § 2 п. 1 ).

Как известно, (см §2 этой главы), существует такое время $\Delta t$, определяемое максимумами модулей вторых производных $H(x_0, p, t)$ в области $\bigcup_{0\le t\le T} D_t \times \Omega_t$, что траектории, выпущенные из области $\bigcup_{0\le t\le T} D_t \times \Omega_t$ '] с одним и тем же импульсом, принадлежащим некоторой окрестности области $\bigcup_{0\le t\le T} \Omega_t$ не пересекаются за время $\Delta t$. Предположим, что

$\Delta t \le (t_i - t_{i-1})/4, \quad i=1,\dots,k, \quad t_0=0.$

Обозначим через $t_i'$ некоторую точку, лежащую в промежутке $[t_i - \frac{\Delta t}{2}, t_i - \frac{\Delta t}{4}]$ $i=1,\dots,k$. Отрезок $[0,T]$ разобьем на промежутки точками $0, t_1', t_1+\frac{\Delta t}{4}, t_2', t_2+\frac{\Delta t}{4}, \dots$ $t_k', t_k+\frac{\Delta t}{4}, T$ (В случае, если $t_k = T$, точка $t = t_k + \frac{\Delta t}{4}$ опускается).

Положим теперь $D_{0i} = D_0(x_0, \frac{\varepsilon\delta}{i})$, $i=1,\dots,k$ $\delta_1 = \min\{\delta, \frac{\Delta t}{4}\}$. Обозначим через $D_{ti}$ и $\Omega_{ti}$ области значений функций $X^+(x_0,t)$, $P^+(x_0,t)$ соответственно, при $x_0 \in D_{0i}$.

По построению при $t \le t_1'$ траектории $X^+(x_0; 0, t)$ не пересекаются, т.е. уравнение $X^+(x_0,t)=x$ однозначно разрешимо относительно $x_0$: $x_0 = x_0^+(x,t)$. Обозначим: $S^+(x,t) = S_+(x_0^+(x,t),t)$.

Пусть $u^+(x,t,h)$ - решение уравнения (3.1) гл 5 удовлетворяющее "положительным" начальным условиям [см. §4 гл.5]

$$u^+\big|_{t=0} = \varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h} f(x)\right] \tag{1.4а}$$

$$ih\frac{\partial u^+}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial S^+}{\partial t}\Big|_{t=0}\varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h} f(x)\right], \tag{1.4б}$$

$$\frac{\partial S^+}{\partial t}\Big|_{t=0} = -H^+(x, \operatorname{grad} f(x), 0)$$

Пусть носитель функции $\varphi(x)$ равен $D_{0\kappa}$. Поскольку $J(x_0,\tau)$ не обращается в нуль при $0<\tau\le t_1'$, то, используя формулы (3.6c) и (3.6d) гл.5 получим, что при $h\to 0$ $u^+(x,t_1',h)$ может быть представлено в виде:

$$u^+(x,t_1',h)=u_0^+(x,t_1',h)+z(x,t_1',h), \qquad (1.5)$$

где

$$u_0^+(x,t_1',h)=\frac{\exp[i/h\,S_+(x_0,t_1')]\,\sigma_+(x_0,t_1')}{\sqrt{J^+(x_0,t_1')}}\varphi(x_0)\Big|_{x_0=x_0^+(x,t_1')} \qquad (1.6)$$

$\sigma_\pm(x_0,t_1')$ определены формулой (3.6b) гл.5, $\|z(x,t_1',h)\|_{L_2}\underset{h\to 0}{\to}0$ (В дальнейшем функцию $\xi(x,t,h)$, удовлетворяющую условию: $\|\xi(x,t,h)\|_{L_2}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$, мы будем обозначать через $O(1)$).

Пусть функция $B_{t_1'}(x)\in C^\infty$ имеет носителем область $D_{t_1',\kappa-1}$, причем $B_{t_1'}(x)\equiv 1$ при $x\in D_{t_1',\kappa}$. Поскольку функция $u_0^+(x,t_1',h)$ отлична от нуля лишь в области $D_{t_1',\kappa}$, то имеет место тождество:

$$u_0^+(x,t_1',h)\equiv B_{t_1'}(x)\,u_0^+(x,t_1',h)\equiv B_{t_1'}(x)\,\Phi^{p_n}\Phi^{q_n}u_0^+(q,t_1',h)$$

Обозначим через $\tilde u_0^+(p,t_1',h)$ функцию вида:

$$\tilde u_0^+(p,t_1',h)=\Phi^{q_n}u_0^+(q,t_1',h).$$

<u>Лемма 8.1</u>

Если $p\,\overline{\in}\,\Omega_{t_1',\kappa}$, то $\tilde u_0^+(p,t_1',h)=O(1)$

Доказательство.

Для доказательства леммы мы воспользуемся методом

стационарной фазы. Стационарные точки $q=q^0$ в интеграле $\tilde{u}_0^+(p,t_1',h)=$

$$=\frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}}\int\limits_{D_{t_1',k}}\Big[\big(J^+(x_0,t_1')\big)^{-1/2}\sigma_+(x_0,t_1')\varphi(x_0)\exp\Big[\frac{i}{h}S_+(x_0,t_1')\Big]\Big]_{x_0=x^+(q,t_1')} e^{-\frac{ipq}{h}}dq$$

удовлетворяют и системе уравнений:

$$\frac{\partial S_+[x_0^+(q,t_1'),t_1']}{\partial q_i}=p_i \qquad i=1,\dots,n$$

и вместе с тем принадлежат области $D_{t_1',k}$ поскольку $\varphi[x_0^+(q,t_1')]$ отлична от нуля лишь при $q\in D_{t_1',k}$. Область значений функции $grad_q\, S_+[x_0^+(q,t_1'),t_1']=$ $=p^+[x_0^+(q,t_1'),t_1']$ при $q\in D_{t_1',k}$ равна $\Omega_{t_1',k}$. Следовательно, в силу условия леммы стационарные точки $q=q^0$ функции $S_+(x_0,t_1')-pq$ в области интегрирования отсутствуют. Из леммы 6.7 следует утверждение леммы 8.1

Из леммы 8.1 следует, что

$$u_0^+(x,t_1',h)\equiv B_{t_1'}(x)\,\Phi^{p_n}\mathcal{F}_{t_1'}(p)\,\tilde{u}_0^+(p,t_1',h)+B_{t_1'}(x)\,O(1), \quad (1.7)$$

где функция $\mathcal{F}_{t_1'}(p)\in C^\infty$, $D[\mathcal{F}_{t_1'}(p)]=\Omega_{t_1',k-1}$,

причем $\mathcal{F}_{t_1'}(\Omega_{t_1',k})\equiv 1$.

Из (1.5) и (1.7) следует: $u^+(x,t_1',h)=$

$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}B_{t_1'}(x)\int\limits_{\Omega_{t_1',k}}\Big\{e^{\frac{ipx}{h}}\mathcal{F}_{t_1'}(p)\int\limits_{D_{t_1',k}}e^{-\frac{ipq}{h}}u_0^+(q,t_1',h)dq\Big\}dp+O(1) \quad (1.8).$$

Проведя те же рассуждения для $\frac{\partial u^+}{\partial t}$, получим:

$$ih\frac{\partial u^+}{\partial t_1'}(x,t_1',h)=\frac{ih}{(2\pi h)^n}B_{t_1'}(x)\int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}}\Big\{e^{\frac{ipx}{h}}\mathcal{F}_{t_1'}(p)\int\limits_{D_{t_1',k}}e^{-\frac{ipq}{h}}\frac{\partial u_0^+}{\partial t}(q,t_1',h)dq\Big\}dp$$

$+ o(1)$.

Поскольку $ih\frac{\partial u_0^+}{\partial t} = u_0^+ \cdot H^+ + o(1)$, то $ih\frac{\partial u^+}{\partial t_1'} =$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^n} B_{t_1'}(x) \int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}} \Big\{ e^{\frac{ipx}{h}} \mathcal{F}_{t_1'}(p) \int\limits_{D_{t_1',k}} e^{-\frac{ipq}{h}} H^+(q,\nabla_q S^+; t_1') u_0^+(q,t_1',h)\, dq \Big\} dp + o(1) \qquad (1.9)$$

Введем обозначения:

$$\Phi_1(p,t_1',h) = \frac{\mathcal{F}_{t_1'}(p)}{(2\pi i h)^{n/2}} \int\limits_{D_{t_1',k}} e^{-\frac{ipq}{h}} u_0^+(q,t_1',h)\, dq \qquad (1.10a)$$

$$\Phi_2(p,t_1',h) = \frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}} \int\limits_{D_{t_1',k}} e^{-\frac{ipq}{h}} H^+(q,\nabla_q S^+; t_1') u_0^+(q,t_1',h)\, dq \qquad (1.10в)$$

Пусть $u(x,t,h)$ - решение уравнения Дирака, удовлетворяющее следующим "начальным" условиям

$$u\Big|_{t=t_1'} = u^+(x,t_1',h) = B_{t_1'}(x) \int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}} e^{\frac{ipx}{h}} \Phi_1(p,t_1',h)\, dp + o(1) \qquad (1.11a)$$

$$ih\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_1'} = ih\frac{\partial u^+(x,t_1',h)}{\partial t_1'} = B_{t_1'}(x) \int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}} e^{\frac{ipx}{h}} \Phi_2(p,t_1',h)\, dp + o(1) \qquad (1.11в)$$

В силу определения оператора $\tilde{Q}_m$ и существования $\tilde{Q}_m^{-1}$ решение $u^+(x,t,h)$ при $t_1' < t \le t_1 + \frac{\Delta t}{4}$ может быть представлено в виде: $u^+(x,t,h) = \tilde{Q}_m^{-1}\{u^+(x,t_1',h); ih\frac{\partial u^+(x,t_1',h)}{\partial t_1'}, 0\} =$

$$= \tilde{Q}_m^{-1}\Big[(2\pi i h)^{-n/2} \int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}} B_{t_1'}(x) e^{\frac{ipx}{h}} \{\Phi_1, \Phi_2, 0\}\, dp + o(1),$$

поскольку $\tilde{Q}_m^{-1}\{o(1), o(1), 0\} = o(1)$

Внеся $\tilde{Q}_m^{-1}$ под знак интеграла, получим

$$u^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)=(2\pi hi)^{-n/2}\int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}} u(x,p,t_1',t_1+\frac{\Delta t}{4},h)dp+O(1),\qquad (1.12)$$

где $u(x,p,t_1',t_1+\frac{\Delta t}{4},h)$ – решение уравнения Дирака, в момент $t=t_1+\frac{\Delta t}{4}$, удовлетворяющее при $t=t_1'$ условиям вида:

$$u\big|_{t=t_1'}=B_{t_1'}(x)\,e^{\frac{ipx}{h}}\,\Phi_1(p,t_1',h)\qquad (1.13a)$$

$$\frac{ih\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_1'}=e^{\frac{ipx}{h}}B_{t_1'}(x)\,\Phi_2(p,t_1',h)\qquad (1.13в)$$

Обозначим $\varphi_1=B_{t_1'}(x)\,\Phi_1(p,t_1',h)$, $\varphi_2=B_{t_1'}(x)\,\Phi_2(p,t_1',h)$

Пусть $x^\pm(t)=\widetilde{X}^\pm(x_0,t)$, $p^\pm(t)=\widetilde{P}^\pm(x_0,t)$, $S^\pm(t)=\widetilde{S}_\pm(x_0,t)$ – решение системы (1.1) при $t_1'<t\leq t_1+\frac{\Delta t}{4}$, удовлетворяющие при $t=t_1'$ следующим условиям:

$$x^\pm(t_1')=x_0,\qquad p^\pm(t_1')=p\qquad S^\pm(t_1')=px_0\qquad (1.14)$$

В силу (1.14) и выбора $\Delta t$, $t_1'$ каждый из определителей $\widetilde{J}^\pm(x_0,t)=\det\|\partial\widetilde{X}^\pm(x_0,t)/\partial x_0\|$ строго положителен при $t\in[t_1',t_1+\frac{\Delta t}{4}]$.

В силу выбора $\Delta t$ при $t_1'\leq t\leq t_1+\frac{\Delta t}{4}$ траектории $\widetilde{X}^\pm(x_0,t)$ не пересекаются, т.е. каждое из уравнений $\widetilde{X}^\pm(x_0,t)=x$ однозначно разрешимо относительно $x_0$: $x_0=\widetilde{x}_0^\pm(x,t)$. Обозначим: $\widetilde{S}^\pm(x,t)=$ $=\widetilde{S}_\pm(\widetilde{x}_0(x,t),t)$. Представим каждое из условий (1.13a) и (1.13в) в виде суммы "положительного" и "отрицательного" условий (см. § 4 гл. 5 . ), т.е.

$$\varphi_1=\varphi^+(x,h)+\varphi^-(x,h)\qquad (1.15)$$

$$\varphi_2=H^+\varphi^+(x,h)+H^-\varphi^-(x,h),\quad H^\pm=H^\pm(x,p,t_1')$$

Из ( 1.13a ), ( 1.13в ) и ( 1.15 ) следует, что

$$u(x,p,t_1',t,h)=\tilde{u}^+(x,p,t,h)+\tilde{u}^-(x,p,t,h) \qquad (1.16)$$

при $t_1' \le t \le t_1+\frac{\Delta t}{4}$,

где $\tilde{u}^\pm(x,t,h)$ – решение уравнения Дирака, удовлетворяющие при $t=t_1'$ следующим условиям:

$$\tilde{u}^\pm\big|_{t=t_1'}=\varphi^\pm e^{\frac{i}{h}px}$$

$$ih\frac{\partial\tilde{u}^\pm}{\partial t}\Big|_{t=t_1'}=\varphi^\pm H^\pm e^{\frac{ipx}{h}} \qquad (1.17)$$

Мы видим, что условия $(1.17)$ являются частным случаем начальных условий, рассмотренных в $\S 4$ гл. 5, в данном случае $f(x)\cdot px$. В силу выбора $\Delta t$ функции $\tilde{J}^\pm(x_0,t)$ строго положительны при $t_1'\le t\le t_1+\frac{\Delta t}{4}$, поэтому, используя результаты § 3 гл. 5, получим, что при $h\to 0$ функции $\tilde{u}^\pm(x,p,t,h)$ могут быть представлены в виде:

$$\tilde{u}^\pm\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)=\tilde{u}_0^\pm\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)+O(1), \qquad (1.18)$$

где $\tilde{u}_0^\pm\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)=$

$$=\frac{\exp\frac{i}{h}\tilde{S}_\pm\left(\tilde{x}_0^\pm,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)}{\sqrt{\tilde{J}^\pm\left(\tilde{x}_0^\pm,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)}}\tilde{\sigma}_\pm\left(\tilde{x}_0^\pm,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\varphi^\pm(\tilde{x}_0^\pm,h), \qquad (1.19)$$

$\tilde{\sigma}_\pm\left(x_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)$ есть $\sigma_\pm(x_0,t)$, в которых $X^\pm(x_0,t)$ заменены на $\tilde{X}^\pm(x_0,t)$, соответственно, $\tilde{x}_0^\pm=\tilde{x}_0^\pm\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)$ – решения уравнений: $\tilde{X}^\pm(x_0,t)=x$

Из $(1.12)$, $(1.16)$ и $(1.18)$ следует, что решение $u^+\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)$, удовлетворяющие начальным условиям $(1.11a)$, $(1.11в)$, при $h\to 0$ может быть представлено в виде:

$$u^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)=(-2\pi i h)^{n/2}\int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}}[\tilde{u}_0^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)+\tilde{u}_0^-(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)dp+O(1) \qquad (1.20)$$

Очевидно, что в силу выбора "начальных" условий $(1.14)$ $\tilde{u}_0^{\pm}(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)$ являются также функциями $p$ и $t_1'$.

Умножим полученную формулу на неотрицательную функцию $\varphi(t_1')\in C^\infty$, равную нулю вне интервала $(t_1-\frac{\Delta t}{2},t_1-\frac{\Delta t}{4})$, такую, что $\int\limits_{t_1-\Delta t/2}^{t_1+\Delta t/4}\varphi(t_1')dt_1'=1$, и проинтегрируем обе части равенства $(1.20)$ по $t_1'$: $t_1-\frac{\Delta t}{2}\le t_1'\le t_1-\frac{\Delta t}{4}$.

Поскольку $u^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)$ не зависит от $t_1'$, то мы получим: $u^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)=$

$$=(2\pi i h)^{-n/2}\int\limits_{t_1-\frac{\Delta t}{2}}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')\Big\{\int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}}[\tilde{u}_0^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)+\tilde{u}_0^-(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)]dp\,dt_1'+O(1) \qquad (1.21)$$

Из $(1.15)$ следует

$$\varphi^{\pm}(x,h)=\pm\frac{(H^{\mp}\varphi_1-\varphi_2)}{H^--H^+}, \qquad (1.22)$$

где

$$H^{\pm}=H^{\pm}(x,p,t_1'),$$

$$\varphi_1=\varphi_1(x,p,t_1',h)=(2\pi i h)^{-n/2}B_{t_1'}(x)\mathcal{F}_{t_1'}(p)\int\limits_{D_{t_1',k}}e^{-\frac{ipq}{h}}u_0^+(q,t_1',h)dq \qquad (1.23)$$

$$\varphi_2=\varphi_2(x,p,t_1',h)=(2\pi i h)^{-n/2}B_{t_1'}(x)\mathcal{F}_{t_1'}(p)\int\limits_{D_{t_1',k}}e^{-\frac{ipq}{h}}H^+(q,\mathrm{grad}_q S^+(q,t_1'),t_1')u_0^+(q,t_1',h)dq \qquad (1.24)$$

Рассмотрим интеграл:

$$I^-(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)=(2\pi i h)^{-n/2}\int\limits_{t_1-\frac{\Delta t}{2}}^{t_1-\frac{\Delta t}{4}}\varphi(t_1')\int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}}\tilde{u}_0^-(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)dp\,dt_1'$$

Из (1.19), (1.22) - (1.24), (1.6) следует

$$I^- = (2\pi h)^{-n} \int\limits_{t_1+\frac{\Delta t}{2}}^{t_1-\Delta t/4} \varphi(t_1') \int\limits_{\Omega_{t_1',\kappa-1}} \mathcal{F}_{t_1'}(p) \int\limits_{D_{t_1',\kappa}} \left(\tilde{J}^-(\tilde{x}_0^-, t_1+\tfrac{\Delta t}{4})\right)^{-1/2} \tilde{\sigma}_-(\tilde{x}_0^-, t_1+\tfrac{\Delta t}{4})$$

$$B_{t_1'}(\tilde{x}_0^-) \exp\left[\frac{i}{h} \tilde{S}^-(\tilde{x}_0^-, t_1+\tfrac{\Delta t}{4})\right] \cdot \frac{-H^+(q, \operatorname{grad}_q S^+(q,t_1'), t_1') + H^+(\tilde{x}_0, p, t_1')}{H^-(\tilde{x}^-, p, t_1') - H^+(\tilde{x}_0, p, t_1')}$$

$$\exp \frac{i}{h} S_+[x_0^+, t_1'] \, (J(x_0^+, t_1'))^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \sigma_+(x_0^+, t_1') \, \varphi(x_0^+) \Bigg|_{\substack{x_0^+ = x_0^+(q, t_1') \\ \tilde{x}_0^- = \tilde{x}_0^-(x, t_1+\frac{\Delta t}{4})}} e^{-\frac{ipq}{h}} \, dp\, dq\, dt_1' \qquad (1.25)$$

Для вычисления $I^-$ применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки $q = q^\circ$; $p = p^\circ$, $t_1' = \tilde{t}$ удовлетворяют системе

$$\operatorname{grad}_q S_+[x_0^+(q, t_1'), t_1'] = p \qquad \operatorname{grad}_p \tilde{S}_-^+[\tilde{x}_0^-, t_1+\tfrac{\Delta t}{4}] = q \qquad (1.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^-(x, t_1+\frac{\Delta t}{4})}{\partial t_1'} = -\frac{\partial S^+(q, t_1')}{\partial t_1'} \qquad (1.27)$$

В силу определения $\tilde{S}^-(x, t_1+\frac{\Delta t}{4})$ и $S^+(q, t_1')$ имеем:

$$\frac{\partial S^+(q,t_1')}{\partial t_1'} = -H^+(q, grad_q S^+(q,t_1'), t_1')$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^-(x,t_1+\frac{\Delta t}{4})}{\partial t_1'} = H^-(\tilde{x}_0, p, t_1') \qquad (1.28)$$

Из (1.26) – (1.28) следует

$$H^-(\tilde{x}_0, p, t_1') = H^+(\tilde{x}_0, p, t_1')$$

Это равенство противоречит тому, что корни характеристического уравнения (см. § 3 гл. 5 ) существенно различны: $H^+(x,p,t)$ не совпадает с $H^-(x,p,t)$ ни в одной точке $(x,p,t)$ , и равенство (1.27) не имеет места. Следовательно, стационарные точки $q=q^0$, $p=p^0$; $t_1'=\tau$ функции $S_+[x_0^+(q, t_1'), t_1'] + \tilde{S}_-(\tilde{x}_0^-, t_1+\frac{\Delta t}{4}) - pq$ в области интегрирования отсутствуют. Из леммы 6.7 следует, что

$$I^-(x, t_1+\frac{\Delta t}{4}, h) = O(1)$$

Рассмотрим теперь функцию $I^+(x, t_1+\frac{\Delta t}{4}, h)$, представимую в виде:

$$I^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}, h) = (2\pi i h)^{-n/2} \int_{t_1-\frac{\Delta t}{2}}^{t_1-\frac{\Delta t}{4}} \varphi(t_1') \int_{\Omega_{t_1', k-1}} \tilde{u}_0^+(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}, h)\,dp\,dt_1'$$

Из (1.19), (1.22) – (1.24), (1.6) следует

$$I^+ = \int_{t_1-\frac{\Delta t}{2}}^{t_1-\frac{\Delta t}{4}} \varphi(t_1')\, \tilde{I}^+(t_1')\,dt_1', \qquad (1.29)$$

где (1.30)

$$\tilde{I}^+ = (2\pi h)^{-n} \int\limits_{\Omega_{t_1',k-1}} \mathcal{F}_{t_1'}(p) \int\limits_{\tau_{t_1',k}} \left(\bar{J}^+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4})\right)^{-1/2} \tilde{\sigma}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) B_{t_1'}(\tilde{x}_0) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{h} \tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4})\right] \cdot \left[\frac{H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1') - H^+(q, \mathrm{grad}_q S^+(q, t_1'), t_1')}{H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1') - H^+(\tilde{x}_0^+, p, t_1')}\right] \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{h} S_+(x_0^+, t_1')\right] \sigma_+(x_0^+, t_1') \cdot \left(J^+(x_0^+, t_1')\right)^{-1/2} \varphi(x_0^+) \Big|_{\substack{x_0^+ = x_0^+(q, t_1') \\ \tilde{x}_0^+ = \tilde{x}_0^+(x, t_1 + \frac{\Delta t}{4})}} \times$$

$$\times e^{-\frac{ipq}{h}} \, dp \, dq$$

Для вычисления $\tilde{I}^+$ применяем метод стационарной фазы. Система уравнений для определения стационарных точек в интеграле ( 1.30 ) имеет вид:

$$\mathrm{grad}_q S_+[x_0^+(q, t_1'), t_1'] = p; \quad \mathrm{grad}_p \tilde{S}_+(\tilde{x}_0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) = q. \qquad (1.31)$$

Пусть $q = q^\circ$; $p = p^\circ$ — стационарная точка. Положим

$$q^\circ = X^+(\bar{x}_0, t_1'), \quad p^\circ = P^+(\bar{x}_0, t_1'), \quad x = X^+(\bar{x}_0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) \quad \bar{x}_0 \in D_{0k}$$

Тогда $x_0^+(q^\circ, t_1') = x_0^+(X^+(\bar{x}_0, t_1'), t_1') \equiv \bar{x}_0$.

Из определения $S_+(x_0^+(q, t_1'), t_1')$ и $\tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \frac{\Delta t}{4})$ следует:

$$\mathrm{grad}_q S_+[x_0^+(q, t_1'), t_1'] = P^+(x_0^+(q, t_1'), t_1')$$

$$\mathrm{grad}_p \tilde{S}_+[\tilde{x}_0^+, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}] = \tilde{X}^+(\tilde{x}_0^+, t_1') = \tilde{x}_0^+$$

Поскольку $p^\circ = P^+(\bar{x}_0, t_1')$, то $\tilde{x}_0^+ = X^+(\bar{x}_0, t_1')$, и система (1.31) удовлетворяется тождественно. Следовательно, $\tilde{X}^+(\bar{x}_0, t) = X^+(\bar{x}_0, t)$ при $t_1' \le t \le t_1 + \frac{\Delta t}{4}$. Отсюда $x_0^+(q^\circ, t_1') = \bar{x}_0(x, t_1 + \frac{\Delta t}{4})$, где $\bar{x}_0(x, t_1 + \frac{\Delta t}{4})$ — решение уравнения $X^+(\bar{x}_0, t_1 + \frac{\Delta t}{4}) = x$. Поэтому и

$$q^0 = X^+(\bar{x}_0(x, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}), t_1') \quad p^0 = P^+(\bar{x}_0(x, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}), t_1') \text{ и}$$

$$\tilde{X}^+(\tilde{x}_0, t) = X^+(\bar{x}_0(x, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}), t) \qquad (1.32)$$

$$t_1' \le t \le t_1 + \Delta t/4.$$

Из равенства $(1.32)$ и того, что точка $(\tilde{x}_0, t_1 + \frac{\Delta t}{4})$ не является фокусом, следует, что при достаточно малой области $D_{ok}$ стационарная точка $q^0, p^0$ единственна. Иначе две "близкие" траектории приходили бы в точку $x$ в момент $t = t_1 + \frac{\Delta t}{4}$, т.е. точка $(\bar{x}_0, t_1 + \frac{\Delta t}{4})$, была бы фокусом. Очевидно, что (см., например, /51, 1/)

$$S^+(x, q, t_1', t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) = \tilde{S}^+(x, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) - pq,$$ где

$p = p(x, q, t_1', t_1 + \frac{\Delta t}{4})$ – решение уравнения:

$$grad_p \tilde{S}_+^+(\tilde{x}_0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) = q$$

Отсюда следует, что

$$S_+[x_0^+(q^0, t_1'), t_1'] - p^0 q^0 + \tilde{S}_+(q^0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) = S_+[\bar{x}_0(x, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}), t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}]$$

В силу метода стационарной фазы имеем

$$\tilde{I}^+ = e^{\frac{i\pi\delta}{4}} \left| \det \begin{Vmatrix} A & -E \\ -E & B \end{Vmatrix} \right|^{-1/2} (\tilde{J}^+(q^0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}))^{-1/2} \tilde{\varphi}_+(q^0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4}) \varphi(\bar{x}_0) \varphi_+(\ldots$$

$$(J^+(\bar{x}_0, t_1'))^{-1/2} \exp\left[\frac{i}{h} S_+(\bar{x}_0, t_1 + \tfrac{\Delta t}{4})\right] \Bigg|_{\substack{q^0 = X^+(\bar{x}_0, t_1') \\ \bar{x}_0 = \bar{x}_0(x, t_1 + \frac{\Delta t}{4})}} + o(1), \qquad (1.3$$

где $\delta$ – сигнатура квадратичной формы с матрицей

$$C = \begin{Vmatrix} A & -E \\ -E & B \end{Vmatrix}$$

$$A=\left\| \frac{\partial^2 S_+[x_0^+(q,t_1'),t_1']}{\partial q_i\,\partial q_j} \right\|_{q=X^+(\bar{x}_0,t_1')} \qquad B=\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+,t_1+\frac{\Delta t}{4})}{\partial p_i\,\partial p_j} \right\| \tag{1.34}$$

$$\tilde{x}_0^+=X_0^+(\bar{x}_0,t_1')$$

$$p=p^+(\bar{x}_0,t_1')$$

$$E=\|\delta_{ij}\| \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

В силу определения $\sigma_+(x_0,t)$ и $\tilde{\sigma}_+(\tilde{x}_0,t)$ (см. §3 п. 5) и равенства (1.32) имеем:

$$\sigma_+(\bar{x}_0,t_1')=\sqrt{1-\frac{[\dot{X}^+(\bar{x}_0,t_1')]^2}{c^2}}\,\exp\left\{i\int_0^{t_1'} R^+(\bar{x}_0,t)\,dt\right\} \tag{1.35}$$

$$\tilde{\sigma}_+(\tilde{x}_0,t_1+\tfrac{\Delta t}{4})=\sqrt{1-\frac{[\dot{X}^+(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4})]}{c^2}}\,\exp\left\{i\int_{t_1'}^{t_1+\frac{\Delta t}{4}} R^+(\bar{x}_0,t)\,dt\right\} \tag{1.36}$$

Отсюда, используя тождество (2.34) п.8, получим:

$$\tilde{I}^+=e^{\frac{i\pi}{4}\sigma}\left(J^+(\bar{x}_0,t_1+\tfrac{\Delta t}{4})\right)^{-1/2}\varphi(\bar{x}_0)\sqrt[4]{1-\frac{[\dot{X}(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4})]^2}{c^2}}$$

$$\exp\left\{i\left[\int_0^{t_1+\frac{\Delta t}{4}} R^+(\bar{x}_0,t)\,dt+\frac{1}{h}S_+(\bar{x}_0,t_1+\tfrac{\Delta t}{4})\right]\right\}+O(1) \tag{1.37}$$

В силу выбора $\Delta t$ и $t_1'$ сигнатура квадратичной формы с матрицей $C$ не зависит от $t_1'$. Из (1.29) и (1.21) следует:

$$u(x,t_1+\tfrac{\Delta t}{4},h)=\frac{e^{\frac{i\pi\delta}{4}}\exp\left\{\frac{i}{h}[S_+(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4})]\right\}}{\sqrt{J^+(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4})}}\,\sigma_+(\bar{x}_0,t_1+\tfrac{\Delta t}{4})\,\varphi(\bar{x}_0)$$

$$\bar{x}_0=\bar{x}_0(x,t_1+\tfrac{\Delta t}{4}) \qquad +O(1) \tag{1.38}$$

Мы доказем в следующем параграфе, что $\sigma$ равно кратности нуля якобиана $\mathcal{J}$ в фокальной точке $t=t_2$.

Поставим вновь начальные условия для уравнения Дирака в точке $t=t_1+\frac{\Delta t}{4}$, исходя из формулы (I.38). Поскольку в промежутке $[t_1+\frac{\Delta t}{4}, t_2']$ фокальные точки отсутствуют, мы можем применить асимптотические формулы главы 5. Тогда мы получим формулу (I.38), где $t_1+\frac{\Delta t}{4}$ заменено на $t_2'$.

Исходя из полученной асимптотики поставим начальные условия для уравнения Дирака в точке $t_2'$ и определим асимптотику решения в точке $t_2+\frac{\Delta t}{4}$, описанным выше способом. Продолжая этот процесс по индукции, мы придем к асимптотической формуле для решения в конечной точке $t=T$ если эта точка не фокальная. Мы получим, очевидно, формулу (I.38), где $t_1+\frac{\Delta t}{4}$ заменено на $T$, а $\sigma$ равно индексу Морса.

Если точка $x_0, T$ - фокус, то вплоть до последнего шага (точки $t_k'$) все рассуждения проводятся по-прежнему. Последний этап предыдущих рассуждений, как мы видели, заключался в вычислении интеграла $I^+$, (где $t_1+\frac{\Delta t}{4}$ заменено на $T$, а $t_1'$ – на $t_k'$), по методу стационарной фазы.

В случае, когда $x_0\ T$ фокус, мы заменим это последнее рассуждение следующим.

Пусть $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n$ - фокальные координаты фокуса $x_0, T$. Поскольку $\tilde{I}^+ = u + o(1)$, то

$$\Phi^{\tilde{x}_k}\tilde{I}^+ = \Phi^{\tilde{x}_k} u + o(1).$$

Предположим вначале, что коэффициенты уравнения Дирака бес-

конечно дифференцируемы. По доказанному в гл. 7, в этом случае выражение $\Phi^{\tilde{x}_\kappa} u$ имеет асимптотику вида

$$\mathcal{F}_1(\tilde{y}_\kappa, T)\, exp\left\{\frac{i}{h}\mathcal{F}_2(\tilde{y}_\kappa, T)\right\},$$

где $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2 \in C^\infty$, $\mathcal{F}_1$ – финитна. Эти функции определены в гл. 7.

Отсюда следует (см. гл. 6, § 2), что детерминант $\mathcal{J}$ матрицы вторых производных фазы подынтегрального выражения в интеграле $\Phi^{\tilde{x}_\kappa} I^+$ отличен от нуля и метод стационарной фазы применим. Исходя из этого нетрудно убедиться, повторяя рассуждения проведенные в лемме 7.4, что якобиан $\mathcal{J}$ выражается определенным образом через функцию $\mathcal{F}_1(\tilde{y}_\kappa, T)$. Полученное соотношение для якобиана $\mathcal{J}$ по замыканию распространяется на случай, когда функция Гамильтона $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раза дифференцируема. Из этого следует, что якобиан   отличен от нуля и для таких функций Гамильтона. Значит, метод стационарной фазы применим к интегралу $\Phi^{\tilde{x}_\kappa} I^+$ и в случае, когда коэффициенты уравнения Дирака $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раза дифференцируемы. Поэтому

$$\Phi^{\tilde{x}_\kappa}\tilde{I}^+ = X_1(\tilde{y}_\kappa, T)\, exp\left\{\frac{i}{h} X_2(\tilde{y}_\kappa, T)\right\} + o(1),$$

где $X_1$ и $X_2$ – некоторые функции, не зависящие от $h$. Для бесконечно дифференцируемого гамильтониана, очевидно, $X_1 = \mathcal{F}_1$, $X_2 = \mathcal{F}_2$. По замыканию эти равенства распространяются на $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раза дифференцируемый гамильтониан. Отсюда следует, что, если коэффициенты уравнения Дирака $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раза дифференцируемы, то в фокальной точке $x_0, T$ решение задачи ( 3.1 )гл.5, (1.4а)(1.5б) представляется в виде

$$u = \Phi^{\tilde{p}_\kappa}\mathcal{F}_1(\tilde{y}_\kappa, T)\, exp\left\{\frac{i}{h}\mathcal{F}_2(\tilde{y}_\kappa, T)\right\} + o(1)$$

т.е. в этом случае первый член асимптотики совпадает с первым членом, вычисленным в гл. 7.

Отсюда следует в силу обратимости времени в задаче Коши, что, если задано начальное (при $t = T$) условие вида

$$\Phi^{\tilde{p}_k} \mathcal{F}_1(\tilde{y}_k, T) \exp\left\{\frac{i}{h} \mathcal{F}_2(\tilde{y}_k, T)\right\},$$

то асимптотика в момент $t=0$ имеет вид (1.4а,1.5б), а если точка $t = -t^o$ - фокус с фокальными координатами $\tilde{\tilde{y}}_{k_1} = \tilde{\tilde{p}}_1, \dots, \tilde{\tilde{p}}_{k_1}, \tilde{\tilde{q}}_{k_1+1}, \dots, \tilde{\tilde{q}}_n$, то асимптотика такой задачи имеет вид

$$\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_1}} \tilde{\mathcal{F}}_1(\tilde{\tilde{y}}_{k_1}, -t^o) e^{\frac{i}{h} \tilde{\mathcal{F}}_2(\tilde{\tilde{y}}_{k_1}, -t^o)}$$

Следовательно, первый член асимптотики в теореме 3.4 с точностью до $o(1)$ будет служить асимптотикой решения уравнения (2.I) § 2, гл. 3, если коэффициенты уравнения (2.I) $\left[\frac{n}{2}\right] + 4$ раза дифференцируемы.

Отсюда следует, что мы доказали теорему типа x/ 3.2 - 3.3 для уравнений Кляйна-Гордона-Фока и Дирака.

Аналогичные рассуждения проводятся и для уравнений Шредингера и Паули.

---

x/ Разница состоит в том, что для уравнения Кляйна-Гордона-Фока и Дирака ставятся два начальных условия.

Заметим, что мы пользовались при этом доказательстве лишь тем фактом, что решение уравнения Дирака по норме $\in L_2$ не превосходит нормы правой части деленной на $h$. Очевидно, такая же оценка в силу леммы 4.1 части 1 будет иметь место и в случае произвольного уравнения вида

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}-A(t)\psi=\mathcal{F}(t),$$

где $A(t)$ самосопряженный в $L_2$ оператор непрерывно зависящий от параметра $t$.

Известно, что любой функции $H(p,x,t)$ можно поставить в соответствие самосопряженный оператор $\hat{H}(\hat{p},x,t)$ например, по формуле: $\hat{H}(\hat{p},x,t)\varphi(x)=$

$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{\frac{i}{h}\sum_{i=1}^{n}p_i'x_i}dp'\int e^{-\frac{i}{h}\sum_{i=1}^{n}p_i'x_i'}H(p',x',t)\varphi(x')dx'$$

Если $H(p,x,t)$ достаточно гладкая функция своих аргументов, то, аналогично лемме 6.13 и теореме 6.1. можно получить для задачи

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\hat{H}(\hat{p},x,t)\psi=0$$

$$\psi\big|_{t=0}=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\},$$

где $\varphi(x)$ - финитна, асимптотику при достаточно малом $t$ с оценкой в $L_2$.

Метод шагов вдоль траектории переносится на этот случай непосредственно, и при условии достаточной гладкости $H(p,x,t)$ мы получим формулу аналогичную (1.38) для

произвольного времени $T$ в нефокальной точке .

Теперь мы докажем, что фаза $\delta$ , которую мы получаем методом шагов вдоль траектории совпадает с индексом по Морсу, если форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0 \quad \text{при } z \neq 0 \tag{1.39}$$

положительно определена.

В главе 7 мы доказали, что $\delta$ равно индексу траектории, введенному в гл. 2 § 2 для путей в пленке $R_t$ .

Поэтому из доказанного будет следовать, что при условии (1.39) этот индекс совпадает (по модулю 4 ) с индексом Морса.

## § 2. Вспомогательные леммы о решениях уравнений Гамильтона.

$1^{\circ}$ Предварительные сведения.

I. В этом параграфе мы будем существенно использовать следующую теорему Морса:

"Если $H(p,q,t)$ – достаточно гладкая функция и $\sum_{i,j} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$ при $z > 0$, то $t = t_0$ является нулём функции $J = det \| \partial X_i(\alpha,t)/\partial \alpha_j \|$ кратности равной дефекту матрицы $\| \partial X_i(\alpha,t)/\partial \alpha_j \|$ при $t = t^0$ ".

Отсюда следует, что число фокусов на конечном отрезке траектории конечно.

Поэтому для любой фиксированной точки $x_0, t$ при достаточно малом $\varepsilon$ существует матрица

$$C(t,\varepsilon) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t-\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t+\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}$$

Мы будем обозначать через $\lambda_i(\varepsilon, t)$ $i = 1, \ldots, n$ – ее собственные значения.

Введем с помощью матрицы еще одно определение индекса траектории $X(x_0, 0, T)$, как $\gamma = \underset{0<t<T}{var} \sum_{i=1}^{n} \lim_{\varepsilon \to 0} (\lambda_i(\varepsilon,t)/|\lambda_i(\varepsilon,t)|)$

Мы докажем в лемме 8.7, что фазовый множитель в формуле (I.38) равен $exp\, i\pi\gamma/4$. Затем в лемме 8.8 мы докажем, что $-\gamma + n/2$ равно индексу Морса.

При этом лемму 8.7 мы докажем в такой форме, которая была бы пригодна и для бихарактеристик волнового уравнения, несмотря на то, что для гамильтониана волнового уравнения условие (I.39) не выполняется. Напомним, что метод шагов вдоль траектории, развитый в предыдущем параграфе, автоматически переносится на случай волнового уравнения, при дополнительном условии конечности числа фокальных точек на траек-

тории. Поэтому при этом условии введенное здесь понятие индекса может быть использовано для вычисления асимптотики решения волнового уравнения.

Для доказательства лемм 8.7 и 8.8 нам понадобится оценка решений краевой задачи для гамильтоновой системы и оценки производных решения уравнения Якоби-Гамильтона. Этим вопросам посвящены леммы 8.2 и 8.5.

В лемме 8.3 доказывается, что релятивистский гамильтониан удовлетворяет условию (I.39).

В лемме 8.2 мы будем опираться на следующую топологическую теорему

"Пусть $C$ и $C'$ два непрерывных отображения замкнутого шара $\overline{T}^n \subset R^n$ в пространство $R^n$, имеющие на $\overline{T}^n$ лишь конечное число неподвижных точек, которые все лежат в $T^n$. Пусть кроме того для всех точек принадлежащих границе шара выполняется неравенство $\rho(C_p, C'p) \leq$ $\leq \rho(Cp, p)$, где $\rho(p, p')$ - расстояние между точками $p$ и $p'$. Тогда отображения $C$ и $C'$ имеют в $T'^n$ одно и то же алгебраическое число неподвижных точек". [4]

2°. О нечетном числе решений.

Лемма 8.2

Пусть $x_i(t), y_i(t)$ $i=1,..,n$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{x}_i = \mathcal{F}_i(x, y, t) \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{y}_i = f_i(x, y, t) \qquad x = x_1 .. x_n \qquad y = y_1 \cdot y_n \tag{2.I}$$

и краевым условиям

$$x_i(0) = x_i^0 ; \quad y_i(t_1) = y_i^0(x(t_1)), \tag{2.2}$$

где функции $\mathcal{F}_i(x, y, t)$ и $f_i(x, y, t)$

удовлетворяют условиям

$$\mathcal{F}_i(x,y,t) \le C_1; \quad f_i(x,y,t) \le C_2 \tag{2.3}$$
$$|\partial y_i^\circ / \partial x_j| \le C_3$$

при

$$|x_i| \le |x_i^\circ + b|; \quad |y_i| \le |y_i^\circ| + (n+1)a; \quad t \le T \tag{2.4}$$

где $b > 0$, $a > 0$, $T > 0$ – некоторые константы x/.

Тогда при $t_1 \le \left\{ \frac{b}{C_1}, \frac{a}{C_2 + C_1 C_3 n}, T \right\}$ число решений либо нечетное, либо бесконечно (с учетом их кратности) xx/, причем для этих решений справедливы оценки

$$\operatorname{Max} |x_i(t) - x_i^\circ| \le b; \quad \operatorname{Max} |y_i(t) - y_i^\circ[x(t_1)]| \le (n+1)a \tag{2.5}$$

---

x/ Вместо условия (2.4) можно потребовать, чтобы на решениях $x(t)$, $y(t)$ имели место априорные оценки (2.3). Тогда для любого конечного $t$ будет существовать нечетное (с учетом кратности) или бесконечное число решений задачи (2.I) - (2.2). Для уравнений Гамильтона при весьма широких ограничениях (см. дополнение) могут быть получены априорные оценки для импульсов, а отсюда и для правых частей системы 2.I. Такая задача отвечает задаче об экстремалях для интеграла от соответствующей функции Лагранжа с одним закрепленным концом и другим концом, удовлетворяющим условию трансверсальности (см. [53] ).

Следовательно, в условиях леммы I дополнения число экстремалей вариационной задачи отвечающей (2.I) - (2.2) нечетно (с учетом кратности). Аналогичный разультат может быть получен тем же методом для задачи с закрепленными концами (ср. [51,1)] ).

В этом последнем случае теорема о нечетном числе решений была при некоторых предположениях доказана Бернштейном [ 7 ].

xx/ Положив $C_1 = b^{1-\delta}$, $1 > \delta > 0$, $C_2 = C(b)$, $a = b[C(b)+1]$, $b = t_1^{1/\delta}$ придем к следствию:

<u>Следствие.</u> Пусть $\mathcal{F}_i(x,y,t)$, $f_i(x,y,t)$ непрерывны удовлетворяют условиям

$$|\mathcal{F}_i(x,y,t)| \le C|x|^{1-\delta}; \quad |f_i(x,y,t)| \le C(y), \quad a \ |\partial y_i^\circ / \partial x_j| \le C_3$$

где $C(y)$ непрерывно. Тогда число решений задачи (2.1),(2.2) либо нечетно, либо бесконечно (для любого конечного $t_1$).

Доказательство[*)]

Задача (2.1) – (2.2) приводится с помощью замены

$$z = x - x^0$$
$$u = y - y^0(x) = y - y^0(z + x^0) \qquad (2.6)$$

к задаче

$$\frac{dz_i}{dt} = \mathcal{F}_i(z + x^0;\ u + y^0;\ t)$$
$$\qquad (2.7)$$
$$\frac{du_i}{dt} = f_i(z + x^0;\ u + y^0;\ t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{dy^0}{dx_k}(z + x^0)\,\mathcal{F}_k(z + x^0;\ y^0 + u;\ t)$$

$$z(0) = 0; \quad u(t_1) = 0, \quad y^0 = y^0(z + x^0) \qquad (2.8)$$

Рассмотрим сначала решение задачи Коши для уравнений (2.7) с начальными условиями: $z(0) = 0, \quad u(0) = u^0$ (2.9)

Кроме того, будем считать (ср.[51,14]), $\tau > 0$

$$|z_i| \leq b; \quad |u_i - u_i^0| \leq a \qquad (2.10)$$

$$\sqrt{\sum |u_i^0|^2} \leq na$$

(отсюда $|u_i| \leq (n+1)\,a$ ).

Из теоремы существования следует для

$$t \leq \min\left\{\frac{b}{c_1},\ \frac{a}{c_2 + c_1 c_3 n},\ \tau\right\},$$

что задача (2.7), (2.9) имеет решение, удовлетворяющее условиям (2.10) и непрерывно зависящее от $u^0$ [59, 3].

Покажем далее, что существует (не обязательно одна) такая

x/ Если $\det \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j^0} \right\| \neq 0$, то кратность решения $X(x_0, t)$ равна I.

точка $\widetilde{u}^{\circ}$ , принадлежащая шару $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i^{\circ})^2} \le na$, .

что, если $u(0)=\widetilde{u}^{\circ}$ , то $u(t_1) \equiv$
$\equiv u(\widetilde{u}^{\circ}, t_1)=0.$ Для этого рассмотрим два отображения шара.

В качестве первого - обозначим его через $C$ - возьмем отображение шара в нуль.

Второе отображение $C'$ зададим функцией $u^{\circ}-u(u^{\circ}, t_1)$. Обозначим через $\rho(P_1, P_2)$ , как обычно, расстояние между точками $P_1$ и $P_2$ . Пусть $P$ принадлежит границе шара. Очевидно, что $C(P)=0$ и $\rho(c(P),P)=na$. Кроме того, в силу $(2.10)$

$$\rho(c'(\rho),\ c(P))=\rho(c'(P),0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i^{\circ}-u_i(u^{\circ},t_1'))^2}<na=$$
$$=\rho(c(P),P)$$

Так как $C$ имеет одну неподвижную точку, то либо число неподвижных точек $C'$ равно $\infty$, либо их алгебраическое число равно I, т.е. существует нечетное (считая кратность точек $u^{\circ}$ ) число точек $\widehat{u}^{\circ}$ , принадлежащих шару, для которых

$$\widehat{u}^{\circ}-u(\widehat{u}^{\circ}, t_1)=\widehat{u}^{\circ}$$

Следовательно, $u(\widehat{u}^{\circ}, t_1)=0$ , что и требовалось.

Лемма 8.3 $\underline{3^{\circ}\text{ оценки решений.}}$

Пусть $$H^{\pm}(x,p,t)=-\Phi(x,t)\mp c(x,t)\sqrt{[p-A(x,t)]^2+m^2c^2(x,t)}$$

тогда матрица $\mp\left\| \dfrac{\partial^2 H^{\pm}}{\partial p_i\,\partial p_j} \right\|$

положительно определена при $m \neq 0$ и неотрицательно определена [x] при $m = 0$

---

<u>Доказательство.</u>

Пусть

$$\mathcal{F}(H, p, x, t) = [H + \Phi(x,t)]^2 - c^2(x,t)[p - A(x,t)]^2 - m^2 c^4(x,t),$$

тогда

$$\frac{\delta \mathcal{F}(H,p,x,t)}{\delta p_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} = 0, \qquad (2.11)$$

то-есть

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}, \qquad (2.12)$$

далее

$$\frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial H^2}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p_i \partial p_j}$$

Подставляя (2.12), получим

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_j}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}\right)^2 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} - 2c^2(x,t)\delta_{ij} = 0$$

---

x/ Т.е. ее $det$ равен нулю, а все остальные диагональные миноры положительны.

Отсюда, обозначая $P = p - A(x,t)$, получим

$$\pm\left\{\sqrt{c^2(x,t)|P|^2 + m^2c^2(x,t)}\right\}^3 \left\| \frac{\partial^2 H^t}{\partial p_i \partial p_j} \right\| = c^4(x,t) \left\| \left\{ \frac{1}{2} P_i P_j - [P^2 + m^2c^2]\delta_{ij} \right\} \right\|$$

У матрицы

$$\| P_i P_j \| = \begin{Vmatrix} P_1^2 & P_1 P_2 & \dots & P_1 P_n \\ P_2 P_1 & P_2^2 & \dots & P_2 P_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n P_1 & P_n P_2 & \dots & P_n^2 \end{Vmatrix} .$$

все строчки линейно зависимы, и, следовательно, ее ранг равен I. Значит $n-1$ ее собственных значений равны нулю, и характеристический многочлен имеет вид $\lambda^n - \alpha\lambda^{n-1} = 0$. Очевидно, что $\alpha = |P|^2$. Следовательно, после вычитания из $\| P_i P_j \|$ матрицы $\{|P|^2 + m^2c^2(x,t)\} E$ мы получаем при $m \neq 0$ положительно определенную матрицу, а при $m = 0$ неотрицательно определенную. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 8.4

Пусть в гамильтониане $H^+(x,p,t,m)$ $m=0$ $\Phi = 0$, $A = 0$. Тогда, если $S(x,t)$ удовлетворяет уравнению Якоби-Гамильтона

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^+(x, \nabla S, t, 0) = 0$$

и условию $S|_{t=0} = px$, то

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(x,p,t)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \equiv 0 \qquad (2.13)$$

Доказательство.

Для действия $S(x,p,t)$ имеем

$$\frac{dS(x,p,t)}{dt} = -H^+ + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H^+}{\partial p_i} = |p|\, c(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{|p|} c(x,t) = 0$$

при условии $S|_{t=0} = px$.

Следовательно, $S(x,p,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \, x_{0k}(x,p,t)$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = x_{0i} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_i}$$

Но по теореме Гамильтона-Якоби [39]

$$\frac{\partial S(x,p,t)}{\partial p_j} = x_{0j}, \qquad (2.14)$$

а значит,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_j} = 0$$

при всех $j = 1, \dots, n$. Поскольку $p \neq 0$, то $\det \left\| \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_j} \right\| = 0$, что в силу (2.14) дает (2.13)

Мы будем теперь рассматривать два случая

А) Гамильтониан $\mathcal{H}(x,p,t)$ удовлетворяющий условию (I.39)

В) Гамильтониан вида $\pm C(x,t)\,|p|$

Все дальнейшие результаты будут относится к случаям А), В), если не будет сделано специальных оговорок.

Будем обозначать через $\tilde{S}(x,p^\circ,t_1,t_2)$ решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H(x, \nabla\tilde{S}, t) = 0$$

$$\tilde{S}\big|_{t=t_1} = p^\circ x \quad ,$$

а через $S(x_0,t)$, $X(x_0,t)$, $P(x_0,t)$ решение задачи $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $\dot{s} = H - \sum p_i H_{p_i}$

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \operatorname{grad} f(x_0), \quad S(0) = f(x_0).$$

Через $x_0 = x_0(x,t)$ будем обозначать решение $x_0$ уравнения

$$X(x_0,t) = x$$

Через $E$ будем обозначать единичную матрицу.

Лемма 8.5

Пусть $|x_i| \le a$, $|p_i^\circ| \le b$ (2.I5)

тогда при $|t_1 - t_2| < \varepsilon$ имеет место соотношение

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x,p^\circ,t_1,t_2)}{\partial x_i\, \partial p_j^\circ} \right\| = E + D(\varepsilon) \tag{2.I6}$$

где $\mathcal{D}(\varepsilon)$ - матрица, стремящаяся по норме к нулю при $\varepsilon \to 0$

Если, кроме того, *в случае* $\beta)$ выполняется условие $p_n^\circ \neq 0$ x/, тогда при $t_1 - t_2 < \varepsilon$ матрица

$$B_\beta = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(p^\circ, x, t_1, t_2)}{\partial p_i^\circ \partial p_j^\circ} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \dots \beta \end{matrix} \right\| \qquad (2.17)$$

отрицательно определена, при достаточно малом $\beta > 0$

<u>Доказательство:</u>

Из теоремы Гамильтона-Якоби следует, что

$$\frac{\partial \tilde{S}(p^\circ, x, t_1, t_2)}{\partial p_i^\circ} = q_i(t_1) \; ; \qquad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i} = p_i(t_2) \qquad (2.18)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i^\circ \partial p_j^\circ} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j^\circ}\bigg|_{\tau = t_1} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial p_i^\circ} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j^\circ}\bigg|_{\tau = t_2} \qquad (2.19)$$

где $q(\tau)$, $p(\tau)$ - решения системы Гамильтона

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial q_i} ; \qquad \frac{\partial q_i}{\partial \tau} = \frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial p_i}, \qquad (2.20)$$

$$i = 1, \dots, n, \qquad q = (q_1, \dots, q_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n).$$

---

x/ Поскольку одно из $p_i^\circ$ $(i = 1, \dots, n)$ не равно нулю, можно полагать, не уменьшая общности $p_n^\circ \neq 0$, в противном случае можно $p_i^\circ$ и $x_i$ перенумеровать.

удовлетворяющие условиям

$$p_i(t_1) = p_i^0 \qquad q_i(t_2) = x_i \tag{2.21}$$

Краевые условия (2.21) удовлетворяют оценкам

$$|p_i^0| \le b, \quad |x_i| \le a \tag{2.22}$$

Отсюда следует в силу леммы 8.2, что при

$$t_2 - t_1 \le \left[ \mathrm{Max} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} \right] \tag{2.23}$$

$$i, \ |p| \le b+n+1, \quad |q| \le a+1, \quad \tau \le T_1$$

выполняются неравенства

$$|q(\tau)| \le a+1, \quad |p(\tau)| \le b+n+1 \tag{2.24}$$

Обозначим через $M_1$ константу, которой не превосходят первые, вторые и третьи производные от $H$ по $p$ и $q$ при $\tau \le T_1 \quad |p| \le b+n+1, \quad |q| \le a+1$.

Продифференцируем уравнения (2.20) и условия (2.21) по $p_i^0$, тогда для $\partial q_k / \partial p_i^0$ и $\partial p_k / \partial p_i^0$ получим систему

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right\}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0}\right) = -\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right\} \tag{2.25}$$

С условиями

$$\left.\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0}\right|_{\tau=t_1} = \delta_{ki} \qquad \left.\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0}\right|_{\tau=t_2} = 0 \tag{2.26}$$

Положив $\left|\frac{\partial q_i}{\partial p_j^\circ}\right| < \varepsilon, \left|\frac{\partial p_\kappa}{\partial p_i^\circ} - \delta_{\kappa i}\right| < \varepsilon,$ (2.27)

мы получим существование решения задачи (2.25) - (2.26) при условиях (2.27) в силу леммы 8.2 для

$$t_2 - t_1 \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2\mathcal{M}_1(1+O(\varepsilon))}, T_1\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3\mathcal{M}} \qquad (2.28)$$

при достаточно малом $\varepsilon$.

Проинтегрировав по $\tau$ уравнения (2.25), получим

$$\frac{\partial q_\kappa}{\partial p_i^\circ} = -\sum_{j=1}^{n}\int_{\tau}^{t_2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_\kappa \partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i^\circ} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\kappa \partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_i^\circ}\right]d\tau$$

$$\frac{\partial p_\kappa}{\partial p_i^\circ} = \sum_{j=1}^{n}\int_{\tau}^{t_1}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_\kappa \partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_i^\circ} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_\kappa \partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i^\circ}\right]d\tau + \delta_{i\kappa} \qquad (2.29)$$

Отсюда в силу (2.27), (2.28)

$$\left.\frac{\partial q_\kappa}{\partial p_i^\circ}\right|_{\tau=t_1} = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\kappa \partial p_i}d\tau + O(\varepsilon^2) \qquad (2.30)$$

$$\left.\frac{\partial p_\kappa}{\partial p_i^\circ}\right|_{\tau=t} = \delta_{\kappa i} + O(\varepsilon) \qquad (2.31)$$

Из формул (2.19) и (2.31) следует первая часть утверждения леммы.

По формуле Лагранжа, учитывая (2.20), имеем

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\kappa \partial p_i}d\tau = (t_2 - t_1)\left.\frac{\partial^2 H}{\partial p_\kappa \partial p_i}\right|_{\tau=t_1} + \frac{(t_2-t_1)^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 H}{\partial p_\kappa \partial p_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right.$$

$$- \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_k \partial p_j} \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} \Big]_{\tau=\tau'} , \qquad (2.32)$$

где $t_1 < \tau' < t_2$

Из $(2.27)$, $(2.28)$, $(2.30)$, $(2.32)$ следует

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0}\Big|_{\tau=t_1} = (t_1 - t_2)\, \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\Big|_{\tau=0} + O(\varepsilon^2) \qquad (2.33)$$

В оценку $O(\varepsilon^2)$ войдут константы $a, b, T$.

Отсюда вытекает, что знаки диагональных миноров матрицы

$$\left\| \frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \right\| \quad при \ \tau = 0$$

совпадают со знаками диагональных миноров матрицы

$$- \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_{\tau=0} ,$$

если $\varepsilon$ достаточно мало по сравнению с ними.

Пусть

все диагональные миноры матрицы

$$- \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|$$ строго положительны.

Отсюда и из $(2.33)$ вытекает, что матрица

$$\left\| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \right\|_{\tau=0}$$

положительно определена, а, следовательно, и матрица $-B_\beta$

при достаточно малом $\beta = O(\varepsilon^2)$ также будет положительно определена. Пусть теперь $H = c(x,t)\,|p|$.

В силу условия леммы

$$p_n^0 \neq 0$$

а, следовательно, в силу леммы 8.3 все диагональные миноры матрицы $-\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|$, за исключением $n$-ого порядка $\left( \det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \right)$ больше нуля.

Отсюда в силу (2.33) следует, что при достаточно малом $\varepsilon$ все диагональные миноры матрицы $\| \partial q_i / \partial p_j^0 \|_{\tau = t}$, за исключением детерминанта этой матрицы, строго положительны. В силу леммы 8.4 в этом случае

$$\det \| \partial q_i / \partial p_i^0 \|_{\tau = t_1} = 0$$

Поэтому

$$\det B_\beta = \beta \det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \Big|_\tau \right\|_{i,j \le n-1} > 0$$

при всех $\beta > 0$. Остальные же диагональные миноры матрицы $-B_\beta$ при достаточно малом $\beta < O(\varepsilon^2)$ будут иметь тот же знак, что и соответствующие миноры матрицы $\| \partial q_i / \partial p_j^0 \|_{\tau = 0}$

т.е. при достаточно малом $\varepsilon$ будут положительны, что и требовалось доказать.

4°. Основные тождества.

Лемма 8.6

Имеет место равенство

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_{\substack{p = P(x_0,t_1) \\ x = X(x_0,t_2)}} \det \left\| \frac{\partial X(x_0,t_2)}{\partial x_{0j}} \right\| =$$

$$
=-\det \left\| \begin{matrix} \left\| \dfrac{\partial^2 \tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| & -E \\ -E & \left\| \dfrac{\partial^2 S(x_0(\xi,t_1),t_1)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| \end{matrix} \right\|_{\substack{x=X(x_0,t_2)\\ p=P(x_0,t_1)\\ \xi=X(x_0,t_1)}} \det \left\| \frac{\partial X(x_0,t)}{\partial x_{0j}} \right\| \qquad (2.34)
$$

__Доказательство__:

Рассмотрим систему уравнений

$$
\frac{\partial \tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i} = \xi_i , \quad \frac{\partial S(x_0(\xi,t_1),t_1)}{\partial \xi_i} - p_i = 0 \qquad (2.35)
$$

при $\quad x = X(x_0, t_2)$.

Этой системе удовлетворяют точки

$$
p_i = P_i(x_0, t_1) , \quad \xi_i = X_i(x_0, t_1) \qquad (2.36)
$$

Продифференцируем систему (2.35) по $x_{0k}$ с учетом (2.36)

Мы получим

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial P_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial X_j(x_0,t_2)}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial X_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial X_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} = \frac{\partial P_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}}
$$

Запишем эти равенства в матричной форме

$$
\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial P_i(x_0,t)}{\partial x_{0k}} \right\| = -\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial p_j} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t_2)}{\partial x_{0k}} \right\| +
$$

$$\left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \tag{2.37}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_j(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| = \left\| \frac{\partial P_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \tag{2.38}$$

Здесь индекс „$O$" при матрице означает, что $x = X(x_0, t_2)$, $\xi = X(x_0, t_1)$, $p = P(x_0, t_1)$.

Подставив (2.38) в (2.37), получим

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 - E = - \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_j(x_0, t_2)}{\partial x_0} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\|^{-1} \tag{2.39}$$

Следовательно,

$$\det \left\{ \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 - E \right\} = -\det \left\| \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2)}{\partial x_{0k}} \right\|$$

$$\det^{-1} \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \tag{2.40}$$

Обозначим

$$B = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\| ; \quad A = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0$$

В силу равенства (2.40) $\det(BA - E)$ отличен от нуля.

Рассмотрим следующие преобразования матрицы

$$\begin{pmatrix} B & -E \\ -E & A \end{pmatrix}$$

которые не меняют ее детерминанта: умножим ее справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & B \end{pmatrix}$$

в результате чего получим матрицу

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & BA-E \end{pmatrix}$$

детерминант которой равен $\det(BA-E)$

Следовательно, .

$$\det \left\| \begin{matrix} B & -E \\ -E & A \end{matrix} \right\| = \det(BA-E) \qquad (2.41)$$

Из (2.41) и (2.40) получаем (2.34)

Рассмотрим промежуток $[t_1, t_2]$, столь малый, что внутри него лежит один фокус $x_0, t'$ траектории $X(x_0, t)$, и кроме того в этом промежутке

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \, \partial x_j} \right\| \neq 0$$

Лемма 8.7

Сигнатура матрицы

$$R(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} \left\| \dfrac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \, \partial p_j} \right\| & -E \\ -E & \left\| \dfrac{\partial^2 S(x_0(\xi, t_1), t_1)}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right\| \end{pmatrix}_{\substack{x = X(x_0, t_2) \\ p = P(x_0, t_1)}} \qquad (2.42)$$

равна $n + \underset{t_1 \le \tau \le t_2}{Var} \sum_{i=1}^{n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon,\tau)}{|\lambda_i(\varepsilon,\tau)|}$

<u>Доказательство:</u>

Обозначим сигнатуру матрицы $R(t_1, t_2)$ через $\gamma(t_1,t_2)$

Докажем вначале, что $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1', t_2')$,

если $t_1 < t_1' < t' < t_2' < t_2$ ( $t'$ - фокус)

Будем непрерывно менять $t$ от $t_1$ до $t_1'$. Если число $\gamma(t, t_2)$ изменяется, то, следовательно,

$$\det \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

должен обратиться в нуль в некоторой точке $t_1 \le t_1'' \le t_1'$ в силу непрерывной зависимости от $t$.

Но это невозможно, поскольку

$$\det R(t_1,t_2) = \tag{2.43}$$

$$= -\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \det \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}}(x_0,t_2) \right\| \det{}^{-1} \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}}(x_0,t) \right\|$$

Первый детерминант правой части равенства (2.43) отличен от нуля в силу выбора промежутка $[t_1, t_2]$, а

$$\det \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

не обращается ни в нуль, ни в $\infty$, если $t$ не является точкой фокуса.

Аналогично, $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1', t_2')$,

если $t_1 < t_1' < t' < t_2' < t_2$.

Поэтому нам достаточно доказать утверждение леммы для промежутка $[t_1', t_2']$, где $t_1'$ и $t_2'$ сколь угодно

близки к $t'$. Для этого промежутка мы будем обозначать

$$\tilde{S}=\tilde{S}(x,p,t_1',t_2'), \quad S=S(x_0(\xi,t_1'),t_1').$$

Возьмем промежуток $[t_1',t_2']$ столь малым, чтобы все диагональные миноры матрицы

$$B_\beta(t_1',t_2')=\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|+\beta\left\|\begin{matrix}0 & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|$$

были бы положительны.

Это сделать можно в силу леммы § 5

Обозначим

$$B=\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|_0, \quad A=\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_0, \quad R_\beta=\left\|\begin{matrix}B_\beta & -E\\ -E & A\end{matrix}\right\|$$

Рассмотрим матрицу

$$R_\beta'=\left\|\begin{matrix}E & 0\\ B_\beta^{-1} & E\end{matrix}\right\| R_\beta \left\|\begin{matrix}E & B_\beta^{-1}\\ 0 & E\end{matrix}\right\|$$

Индекс инерции квадратичной формы с данной матрицей $R_\beta$ совпадает с индексом инерции квадратичной формы с матрицей $R_\beta'$, поскольку это та же квадратичная форма, но в другом базисе [ 21 ]. В результате умножения матриц получим

$$R_\beta'=\left\|\begin{matrix}B_\beta & 0\\ 0 & A-B_\beta^{-1}\end{matrix}\right\|$$

Поскольку $B_\beta$ положительно определена, то индекс инерции $R_\beta'$ совпадает с индексом инерции матрицы $D(t_1',t_2')=A-B_\beta^{-1}$. Таким образом, $\gamma(t_1,t_2)$ равно индексу инерции матрицы $D(t_1',t_2')$. Но в силу (2.39)

$$D(t_1',t_2')=A-B_\beta^{-1}=B_\beta^{-1}\{(BA-E)-(B-B_\beta)A\}=B_\beta^{-1}\left\{\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial x_j}\right\|\right..$$

$$\cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2')}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1')}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1} + (B_\beta - B) A \Big\}$$

Домножим $D(t_1', t_2')$ слева и справа на $B_\beta^{1/2}$. В силу самосопряженности $B_\beta^{1/2}$ сигнатура полученной матрицы равна сигнатуре матрицы $D(t_1', t_2')$.

Следовательно, число $\gamma(t_1', t_2')$ равно $\operatorname{sign} B_\beta^{1/2} D(t_1', t_2') B_\beta^{1/2}$ т.е. разнице между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы

$$B_\beta^{1/2} D(t_1', t_2') B_\beta^{1/2}$$

Но собственные значения этой матрицы совпадают с собственными значениями матрицы

$$B_\beta^{1/2} \left\{ B_\beta^{1/2} D(t_1', t_2') B_\beta^{1/2} \right\} B_\beta^{-1/2}$$

/см. [21] .../.

Окончательно можно сказать, что $\gamma(t_1', t_2) - n$ равно разности между числом положительных и числом отрицательных собственных значений матрицы

$$B_\beta D(t_1', t_2') = -\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2')}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}}(x_0, t_1') \right\| + I_\beta A,$$

где
$$I_\beta = B_\beta - B = \beta \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица $A$ в силу равенства (2.38) ограничена, поскольку точка $t_1'$ не является фокусом. Поэтому матрица $I_\beta A$ стремится по норме к нулю при $\beta \to 0$, и

$$\lim_{\beta\to 0} B_\beta D(t_1,t_2') = BA+E$$

Детерминант предельной матрицы отличен от нуля, а потому знаки собственных значений матриц $\lim\limits_{\beta\to 0} B_\beta D(t_1',t_2')$ и $B_\beta D(t_1',t_2')$ при достаточно малом $\beta$ совпадают. Точно также можно доказать, что при достаточно малом $\beta$ совпадают сигнатуры матриц $R_\beta(t_1',t_2')$ и $R(t_1',t_2')$ поскольку $\det R(t_1',t_2') \neq 0$

Следовательно, сигнатура матрицы $R(t_1,t_2)$ (равная сигнатуре матрицы $R(t_1',t_2')$ ) равна разности между числом положительных и числом отрицательных собственных значений матрицы $C(t_1',t_2') =$

$$= -\left\| \frac{\partial^2 \widetilde{S}(x,p,t_1',t_2')}{\partial p_i\, \partial x_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t_2')}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t_1')}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}$$

Обозначив $t_1' = t' - \varepsilon$, $t_2' = t' + \varepsilon$ будем иметь в силу леммы 8 5 :

$$C(t_1',t_2') = [-E + D(\varepsilon)] \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t'+\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t'-\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1},$$

где $D(\varepsilon)$ - некоторая стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$ матрица. Пусть $\lambda_i(\varepsilon)$, $i=1,\dots,n$ - собственные значения и $\psi_i(\varepsilon)$, $i=1,\dots,n$ - нормированные собственные функции матрицы $C(t',\varepsilon)$ , где

$$C(t', \varepsilon) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'+\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| : \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'-\varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

Следовательно,

$$\left| C(t_1', t_2')\psi_i(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) \right| = \left| \lambda_i(\varepsilon) D(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) \right| \leq |\lambda_i(\varepsilon)| \, \| D(\varepsilon) \|$$

Отсюда следует /лемма 2.3,х4/, что

$$\left| \frac{\lambda_k(\varepsilon) - \mu_k}{\lambda_k(\varepsilon)} \right| \to 0 \qquad (2.44)$$

при $\varepsilon \to 0$,

где $\mu_k(\varepsilon) = \mu_k(t_1', t_2')$ — собственное значение матрицы $C(t_1', t_2')$.

Пусть $\lambda_k(\varepsilon) = a_k(\varepsilon) + i b_k(\varepsilon)$, тогда

$$\frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \frac{\operatorname{sign} a_k(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_k(\varepsilon)}{a_k(\varepsilon)}\right)^2}} + i \frac{\operatorname{sign} b_k(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2}}$$

В силу (2.44) $\left(1 + \frac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}^2\right)^{-1/2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$,

поскольку $\mu_k(\varepsilon)$ действительны в силу самосопряженности $D(t_1', t_2')$

т.е. $\frac{b(\varepsilon)}{a(\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. Значит,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim \frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\mu_k(\varepsilon)|} = \operatorname{sign} \mu_k(\varepsilon),$$

поскольку $sign\ \mu_\kappa(\varepsilon)$ не зависит от $\varepsilon$ x/

Таким образом, мы пришли к заключению, что $\gamma(t_1,t_2)$ равно $\sum\limits_{K=1}^{n} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_\kappa(\varepsilon)}{|\lambda_\kappa(\varepsilon)|}$, где $\lambda_\kappa(\varepsilon)$ - собственные значения матрицы $C(t',\varepsilon)$, так как это и есть разность между числом положительных и числом отрицательных $\mu_\kappa(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Лемма 78

Пусть выполнено условие:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} z_i z_j > 0 ,$$

и пусть точка $x_0, t_0$ - фокальная, тогда дефект матрицы $\left\| \frac{\partial X_i(x_0,t_0)}{\partial x_{0i}} \right\|$ равен числу отрицательных членов набора $(i=1,\dots,n)$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon,t_0)}{|\lambda_i(\varepsilon,t_0)|}$

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим матрицу

$$A(t) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t)}{\partial x_{0j}} \right\| = \| a_{ij}(t) \|$$

в точке $t=t_0$ Существуют матрицы $C(t)$ и $C_1(t)$, $|C|=|C_1|=1$ такие, что матрица $\tilde{A}(t)=CAC_1$, диагональна при $t=t_0$.

Если фокус $t=t_0$ $K$-того порядка, то матрица в силу теоремы Морса имеет вид

$$\tilde{A}(t_0) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ & a_{K+1} \dots 0 \\ 0 & 0 \ \ddots\ a_n \end{matrix} \right\| \quad a_i = a_{ii}(t_0) \quad при\ i>K$$

---

x/ Т.к. $\mu_\kappa(\varepsilon)$ не может обращаться в нуль при $\varepsilon\to 0$ в силу того, что $det\ R(t_1',t_2')\neq 0$

Рассмотрим матрицу $\tilde{A}_\kappa(t) = \|a_{ij}(t)\|_{i,j\le\kappa}$
и матрицу $B_\kappa(t_0) = \lim (t-t_0)^{-1}\tilde{A}_\kappa(t)$.
Имеем $|\tilde{A}_\kappa(t)| = (t-t_0)^\kappa |B_\kappa(t_0)| + O(t-t_0)^{\kappa+1}$ $(|A| = \det A)$
Докажем, что $|B_\kappa(t_0)| \neq 0$. Вычитая $j$-тые столбцы (где $j>\kappa$) матрицы $\tilde{A}(t)$, умноженные на величины порядка $O(t-t_0)$, из первых $\kappa$ столбцов мы можем добиться того, что все элементы $a_{ij}(t)$, где $i>\kappa,\ j\le\kappa$ будут иметь порядок $O[(t-t_0)^2]$.
Аналогично, вычитая строки $i>\kappa$, умноженные на величины $O(t-t_0)$, из первых к строк, получим второй порядок малости по $t-t_0$ для коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i\le\kappa,\ j>\kappa$.

Эта процедура не изменит матрицы $B_\kappa(t_0)$ и не изменит $\det \tilde{A}(t)$. Поэтому

$$|\tilde{A}(t)| = (t-t_0)^\kappa |B_\kappa(t_0)| \prod_{j=\kappa+1}^{n} a_j + O[(t-t_0)^{\kappa+1}$$

Поскольку в силу теоремы Морса $|\tilde{A}(t)| = O[(t-t_0)^\kappa]$, то $|B_\kappa(t_0)| \neq 0$.

Пусть $D_1$ и $D_2$ такие ортогональные матрицы, что матрица $\tilde{B}_\kappa(t_0) = D_1 B_\kappa(t_0) D_2$ диагональна.

Взяв матрицы

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}; \quad \tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}; \quad \tilde{C} = \tilde{D}_1 C; \quad \tilde{C}_1 = C_1 \tilde{D}_2$$

мы получим матрицу $\tilde{\tilde{A}}(t) = \tilde{C}\dot{A}(t)\tilde{C}_1$

Очевидно, что матрица $\widetilde{A}(t)$ может быть представлена в виде

$$\widetilde{\widetilde{A}}(t)=\left\|\begin{matrix} (t-t_0)\,a_1\ldots 0 & & \\ 0 \quad \ddots (t-t_0)a_k & O(t-t_0) & \\ & a_{k+1}+O(t-t_0) & O(t-t_0) \\ 0 \quad (t-t_0) & O(t-t_0) & a_n+O(t-t_0) \end{matrix}\right\|+$$

$$+\left\| O(t-t_0)^2 \right\|$$

где $a_1 \ldots a_n$ не равны нулю

Вычитая линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) первых $k$ строк из последних $n-k$ строк, мы можем добиться того, что элементы $\widetilde{\widetilde{a}}_{ij}(t)$ $i>k$, $j<k$, полученной матрицы будут иметь порядок $O[(t-t_0)^2]$. Аналогично, вычитая линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) первых $k$ столбцов из последних $n-k$ столбцов можно добиться того, что у полученной матрицы элементы $\widetilde{a}_{ij}(t)$ $i>k$, $j<k$ будут иметь порядок $O[(t-t_0)^2]$.

В дальнейшем мы условимся обозначать через $D_i^k(t)$ - некоторые неособые матрицы $k$-того порядка

Мы доказали, что существуют такие невырожденные постоянные матрицы $S_1$ и $S_2$, что $S_1 A(t) S_2$ имеет вид

$$S_1 A(t) S_2 = \left\|\begin{matrix} (t-t_0)\mathcal{W}_k & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_{n-k}+(t-t_0)D_1^{n-k}(t) \end{matrix}\right\| + D_2^n(t)(t-t_0)^2$$

где $\mathcal{W}_k=\left\|\begin{matrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k\end{matrix}\right\|$, $\mathcal{W}_{n-k}=\left\|\begin{matrix} a_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{matrix}\right\|$.

Имеем *)

$$[S_1 A(t) S_2]^{-1} = \begin{Vmatrix} (t-t_0)\mathfrak{M}_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_{n-k} + (t-t_0) D_1^{n-k}(t) \end{Vmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ E + (t-t_0) D_3^{n}(t) \begin{Vmatrix} \mathfrak{M}_k^{-1} & 0 \\ 0 & (t-t_0)\mathfrak{M}_{n-k}^{-1} \end{Vmatrix} + (t-t_0)^2 D_4^{n}(t) \right\}^{-1}$$

Отсюда

$$[S_1 A(t) S_2]^{-1} = \begin{Vmatrix} (t-t_0)^{-1}\mathfrak{M}_k^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_{n-k}^{-1} + (t-t_0) D_5^{n-k}(t) \end{Vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left\{ E + (t-t_0) D_6^{n}(t) \right\}.$$

Собственные значения матрицы

$$C(\varepsilon, t_0) \quad = A(t_0-\varepsilon)[A(t_0+\varepsilon)]^{-1}$$

совпадают с собственными значениями матрицы

$$S_1 A(t-\varepsilon) [A(t_0+\varepsilon)]^{-1} S_1^{-1} = S_1 A(t_0-\varepsilon) S_2 \cdot$$

$$\{S_1 A(t_0+\varepsilon) S_2]^{-1} = \begin{Vmatrix} \varepsilon\mathfrak{M}_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_{n-k} + \varepsilon D_1(t) \end{Vmatrix} \cdot$$

---

*) Мы используем тождество, справедливое для произвольных матриц $A$ и $B$: $(A+B)^{-1} = \{(1+BA^{-1})A\}^{-1} = A^{-1}(1+BA^{-1})^{-1}$ при условии, что обе части тождества существуют.

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon^{-1}\gamma_\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma_{n-\kappa}^{-1}+\varepsilon D_6^{n-\kappa}(t) \end{matrix} \right\| \left[1+\varepsilon D_7^n(t)\right]+\varepsilon^2 D_8^n(t)=$$

$$=\left\| \begin{matrix} -E_\kappa & 0 \\ 0 & E_{n-\kappa} \end{matrix} \right\| \left(1+\varepsilon D_9^n(t)\right).$$

где $E_i$ - единичная матрица $i$-того порядка. При $\varepsilon\to 0$ число отрицательных членов последовательности $\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_i(\varepsilon,t_0)}{|\lambda_i(\varepsilon,t_0)|}}_{i=1,\dots,n}$ равно $\kappa$, что и требовалось доказать.

Из лемм 8.7 и 8.8 следует в силу теоремы Морса, что фазовый множитель $\exp i\pi\delta/4$ в формуле (I.38) равен $\exp i\pi n/4 \times$
$\times \exp - i\pi\tilde{\gamma}/2$, где $\tilde{\gamma}$ - индекс Морса траектории $X(x_0;0,T)$

## ГЛАВА 9. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВОК К КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ БОРА.

### § I. Введение

Квазиклассическое представление, как уже неоднократно указывалось, позволяет найти не только первый член асимптотического разложения решения по степеням $h$. После того, как найдено квазиклассическое представление, мы попадаем в сферу действия методов теории возмущений.

Наиболее сложной оказывается проблема регуляризации членов ряда теории возмущений при подсчете следующих членов разложения собственных значений в задачах § 5 гл. 3 и § 4 гл. 4.

В качестве примера приведем вычисление следующих членов квазиклассической асимптотики для собственных значений одномерного x/ уравнения Шредингера [51,6), 7)].

Рассмотрим уравнение

$$-\varepsilon^2 u'' + v(x)\, u = \lambda u, \tag{I.I}$$

где $\varepsilon$ - малый параметр.

---

x/ Заметим, что методы вычисления членов асимптотического ряда для многомерного случая, которые будут изложены в следующем выпуске, существенно отличаются от метода приведенного в этой главе и основаны на определении некоторых инвариантов канонических преобразований и определении инвариантным образом элементов $e^{i}(\alpha, h)$ в операторе $K^{\gamma,\alpha_0}_{\gamma_h, r, h}$. Тем ни менее приведенное здесь доказательство полезно, т.к. весьма наглядным образом устанавливает связь между регуляризацией членов ряда теории возмущений и вычислением поправок к собственным значениям.

Мы будем предполагать, что I) спектр уравнения $(1.1)$ вблизи точки $\lambda$ чисто дискретный, 2) существует область $V(x)-\lambda<0$, односвязная компонента которой ограничена точками $x_1(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$, являющимися простыми нулями функции $V(x)-\lambda$
3) функция $V(x)$ трижды непрерывно дифференцируема.

Известно, что существуют собственные значения $\lambda_n$ такие, что $\lambda_n=\lambda_n^{(1)}+O(\varepsilon^2)$,
где $\lambda_n$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\int_{x_1(\lambda_n^{(1)})}^{x_2(\lambda_n^{(1)})}\sqrt{\lambda_n^{(1)}-V(x)}\,dx=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon \qquad (1.2)$$

(формула Бора).

При некоторых предположениях на $V(x)$ доказано [76], что формула $(1.2)$ определяет первый член асимптотики $\lambda_n$ при $n\to\infty$

§2. Второй член асимптотики.

В своей известной книге [76] Титчмарш дает эвристический вывод формулы для второго члена асимптотики по $n$ и ставит вопрос о строгом обосновании ее для случая, когда $V(x)=x^k$. В этом случае такая задача, как уже было указано, с помощью простой замены сводится к квазиклассической асимптотике. Сам Титчмарш решал эту задачу лишь в случае $V(x)=x^4$ и $V(x)=x^6$ весьма сложным методом.

Авторов были получены и доказаны рекуррентные формулы,

определяющие все члены асимптотического разложения по $h$. При этом формулы для второго и третьего члена разложения получены в простом замкнутом виде [51, 6), 7)]

Эти формулы по виду хотя и отличаются от формулы, приведенной у Титчмарша, однако могут быть приведены к последней с помощью несложного преобразования.

Мы опишем здесь процедуру, с помощью которой можно получать рекурентным образом все члены разложения собственных значений $E_n$ по степеням $h$.

Формула, полученная в [51, 6)], имеет вид

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + o(\varepsilon^2), \tag{2.1}$$

где

$$\lambda_n^{(2)} = -\frac{1}{24\,T}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\int\limits_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{[v'(x)]^2 dx}{\sqrt{\lambda - v(x)}}\right]_{\lambda=\lambda_n^{(1)}} \tag{2.2}$$

здесь

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1(\lambda_n^{(1)})}^{x_2(\lambda_n^{(1)})} \frac{dx}{\sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}} \tag{2.3}$$

Обозначая



32-1419

$$\tilde{\Phi}^2 = \int_0^T \Phi^2(x(\tau))\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{\Phi(x)}{\sqrt{\lambda - V(x)}}\,dx$$

мы придем к следующей формуле

$$\lambda_n^{(2)} = -\frac{1}{12T}\,\frac{d^2\tilde{\mathcal{F}}^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=\lambda_n^{(1)}},$$

где $\mathcal{F} = -V'(x)$.

В настоящей заметке мы дадим совершенно элементарное доказательство формулы (2.1) правда с более слабой оценкой чем в [51, 6]

Для этого мы прибегнем к помощи равномерной в точках $x_1(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$ асимптотике собственных функций $\psi_n$ (см. [15]).

Пусть $W_n(x)$ – собственные функции уравнения

$$-\varepsilon^2 W_n'' + (x^2 - \mu_n) W_n = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} W_n^2\,dx = 1 \qquad (2.4)$$

Известно, что $\mu_n = \pi\varepsilon(n + \frac{1}{2})$.

Положим

$$\mathcal{F}(x) = y(x)\,z(x)\,W_n(y(x))\,\varphi(x),$$

где $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \sqrt{\frac{\lambda_n^{(1)} - V(x)}{\mu_n - y^2}} \qquad (2.5)$$

и краевым условиям $y[x_1(\lambda_n^{(1)})] = \sqrt{\mu_n}$,

$y[x_2(\lambda_n^{(1)})] = -\sqrt{\mu_n}$

(это возможно в силу (1.2))

$$z(x) = (y')^{-1/2} \quad ,$$

$\varphi(x)$ - финитная функция, равная нулю вне интервала $(x_1(\lambda) - 2\delta, \quad x_2(\lambda) + 2\delta)$ и равная I при $x_1(\lambda) \le x \le x_2(\lambda) + \delta$.

Заметим, прежде всего, что имеет место следующее предложение.

Пусть $v'(x)$ не обращается в нуль в точках $x = x_1(\lambda_n^{(1)})$ и $x = x_2(\lambda_n^{(1)})$ и пусть существует $k$ непрерывных производных функции $v(x)$, тогда $y(x)$ имеет $k$ непрерывных производных в точках $x = x_1(\lambda_n^{(1)})$ и $x = x_2(\lambda_n^{(1)})$.

Докажем вначале, что $y'$ ограничена в точках поворота $x = x_1(\lambda_n^{(1)})$ и $x = x_2(\lambda_n^{(1)})$ и что $y(x_\nu) \ne 0 \quad \nu = 1, 2$

Имеем

$$y'^2 = \frac{\lambda_n^{(1)} - v(x)}{(\sqrt{\mu_n} - y)(\sqrt{\mu_n} + y)} \qquad (2.6)$$

Поскольку

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\lambda_n^{(1)} - v(x)}{(\sqrt{\mu_n} - y)(\sqrt{\mu_n} + y)} = \frac{v'(x)}{2\sqrt{\mu_n} \cdot y'(x_1)}$$

$$x_1 = x_1(\lambda_n^{(1)}),$$

то

$$y'^2_{x = x_1} = \frac{v'(x)}{2\sqrt{\mu_n}\, y'(x_1)},$$

т.е. $y'(x_1) = \left[\frac{1}{2\sqrt{\mu_n}}\, v'(x)\right]^{1/3} \neq 0$.

Следовательно

$$y - \sqrt{\mu_n} = O(x - x_1)$$

Разлогая $y + \sqrt{\mu_n} = O(x - x_2)$

$$\Phi(y) = \left[\int\limits_{\sqrt{\mu_n}}^{y} \sqrt{\mu_n - \xi^2}\, d\xi\right]^{2/3}$$

в ряд по $(y - \sqrt{\mu_n})$

и ограничиваясь первыми $k$. членами будем иметь, обозначая, через $P_k\ \tilde{P}_k\ \bar{P}_k$ некоторые полиномы степени $k$

$$\Phi(y) = P_k(y - \sqrt{\mu_n}) + O(x - x_1)^{k+1}, \quad P_k'(0) \neq 0$$

Поскольку в силу $(2.5)$

$$\Phi(y) = \left[\int\limits_{x_1}^{x} \sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}\right]^{2/3} = \tilde{P}_k(x - x_1) + O(x - x_1)^{k+1},$$

то

$$P_k(y - \sqrt{\mu_n}) = \tilde{P}_k(x - x_1).$$

Поскольку $P_k'(0) \neq 0$ обратная функция $P_k^{-1}(z)$ регулярна в окрестности $z = 0$, а значит

$$y - \sqrt{\mu_n} = P_k^{-1}\left\{\tilde{P}_k(x - x_1) + O(x - x_1)^{k+1}\right\} =$$

$$= \bar{P}_k(x - x_1) + O(x - x_1)^{k+1}$$

Аналогично доказывается утверждение и для точки $x=x_2$

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{F}_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon^2 \mathcal{F}_n'' + \left[V(x) - \lambda_n^{(1)}\right] \mathcal{F}_n(x) - \varepsilon^2 \frac{z''}{z} \mathcal{F}_n(x) =$$

$$= \varepsilon^2 \left\{ \varphi'' z W_n + 2\varphi'(z W_n)' \right\} \qquad (2.7)$$

Поскольку $\varphi'$ и $\varphi''$ отличные от нуля лишь в подобласти области $\lambda_n' > V(x)$, из асимптотики функции Вебера следует, что правая часть равенства имеет порядок $e^{-\delta/\varepsilon}$

Умножая уравнение $(2.7)$ на $\psi_n(x)$ и интегрируя по частям, получим

$$\left[\lambda_n - \lambda_n^{(1)}\right] \int_{x_1-2\delta}^{x_2+2\delta} \psi_n \mathcal{F}_n dx = \varepsilon^2 \int_{x_1-2\delta}^{x_2+2\delta} \frac{z''}{z} \mathcal{F}_n \psi_n dx + O\left(e^{-\delta/\varepsilon}\right) \qquad (2.8)$$

Мы всюду опускаем аргумент $в$ $x_1(\lambda_n')$ $и$ $x_2(\lambda_n')$

Учитывая асимптотику при $\varepsilon \to 0$ функции $\psi_n$ в подобласти области $\lambda_n' > V(x)$ /см. [15] /, получим

$$\int \psi_n^2 dx - \int_{-\infty}^{x_2+\delta} \psi_n^2 dx - \int_{x_1-\delta}^{\infty} \psi_n^2 dx \to$$

$$\to \frac{2}{T} \int_{x_1-\delta}^{x_2+\delta} \frac{1}{p} \sin^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^{\lambda} p\, dx + \frac{\pi}{2} \right\} dx \to 1 + O(\delta)$$

здесь

$$p = \sqrt{\lambda_n' - V(x)}$$

Отсюда, поскольку $\int \psi_n^2 dx = 1 \qquad (2.9)$

$$\int_{-\infty}^{x_2+\delta} \psi_n^2\,dx + \int_{x_1-\delta}^{\infty} \psi_n^2\,dx \to O(\delta) \qquad (2.10)$$

Аналогичное утверждение имеет место для $\mathcal{F}_n(x)$

Поэтому

$$\frac{\lambda_n - \lambda_n'}{\varepsilon^2} = \frac{\displaystyle\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP} \sin\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1}^{x} P\,dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx}{\displaystyle\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{1}{P}\sin^2\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1}^{x} P\,dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx} + O_\delta(\varepsilon) + O(\delta) = \qquad (2.11)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP}\,dx + \bar{O}_\delta(\varepsilon) + O(\delta) = \frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP}\,dx + O_\delta(\varepsilon) + O(\delta)$$

Устремляя последовательно $\varepsilon \to 0$ и затем $\delta \to 0$ получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_n - \lambda_n'}{\varepsilon^2} - \frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP}\,dx = 0 \qquad (2.12)$$

поскольку это выражение от $\delta$ не зависит.

Выражая $z$ и $z''$ через $y$ получим

$$\frac{z''}{zP} = -\frac{1}{12}\frac{d^2}{d\lambda^2}\frac{(z')^2}{P} + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\frac{y'}{P^3} + \frac{1}{4}\frac{y'}{(\mu_n - y^2)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{5}{4}\frac{y^2 y'}{(\mu_n - y^2)^{3/2}}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP}\,dx = -\frac{1}{12}\,\frac{d^2}{d\lambda^2}\int\limits_{x_1+\delta}^{x_1-\delta} \frac{(v')^2}{P}\,dx + O(\delta)$$

Отсюда мы приходим к тождеству

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP}\,dx = -\frac{1}{12}\,\frac{d^2}{d\lambda^2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{(v')^2}{P}\,dx$$

которое и завершает доказательство формулы $(2.1)$. Итак доказана

Теорема 2.1

В предположениях I) - 3) существуют собственные значения $\lambda_n$ уравнения $(1.1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^2 + O(\varepsilon^2) \quad \text{при} \quad n\varepsilon \to const,$$

где $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^2$ определены формулами $(1.2)$ и $(2.2)$.

Следствие I.

Пусть выполнены предположения I) 2), 3), тогда асимптотическое разложение собственного значения $V_n$ уравнения (1.7) гл.2, §1, n4° имеет вид

$$V_n = \frac{(2n+1)\pi}{2S} - \frac{[\lambda_n^2]^2}{72\pi(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2.13)$$

$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} P\,dx$$

Для вывода формулы $(2.13)$ нужно положить в предыдущей задаче $\lambda_n = \lambda$ так, чтобы $\varepsilon$ стремилось к

нулю принимая дискретные значения $\varepsilon_n$. Тогда формулы (2.1), (2.2) будут определять асимптотику этих дискретных значений при $n \to \infty$. Разрешив с точностью до $O(\varepsilon^2)$ уравнение

$$\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon_n = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\lambda - \varepsilon^2 \lambda_n^2 - V(x)}\, dx + o(\varepsilon^2)$$

относительно $\varepsilon_n = \frac{1}{\gamma_n}$ мы получим формулу (2.13)

Следствие 2.

Асимптотика собственных значений уравнения

$$-\psi_n'' + x^\alpha \psi_n = \lambda_n \psi_n \qquad \alpha > 0 \qquad (2.14)$$

при $\lambda_n \to \infty$ имеет вид

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} + O\left(\lambda_n^{(2)}\right),$$

где $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$ определяются формулами (1.2) (2.2)

Замена переменных в уравнении (2.14)

вида $x = \gamma\xi$ $\lambda_n = \beta E_n$

сводит задачу (2.14) к задаче о квазиклассической асимптотике

Таким образом задача, поставленная Титчмаршем здесь решается.

## §3. Третий член асимптотики.

Предположим теперь, что сверх условий 1) и 2) §1 функция $V(x)$ 6 раз непрерывно дифференцируема. Тогда в силу доказанного выше предложения мы получим, что $V(x)$ имеет в точках $x_1$ и $x_2$ 6 непрерывных производных, а $\frac{z''}{z}$ 3 непрерывных производных.

Обозначим

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n - y^2}} \left\{ \lambda_n^{(2)} \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\lambda_n^2 - V(x)}} + \int_{x_1}^{x} \frac{z''}{zP}\, dx \right\} \qquad (3.1)$$

В окрестности точки $x = x_1$ имеем

$$\frac{z''}{z} = P_3(x - x_1) + O(x - x_1)^3 \qquad \mu_n - y^2 = P_4(x - x_1) + O(x - x_1)^4$$

Из вида $y_1$ следует, что оно имеет в точке $x_1$ 3 непрерывных производных.

Заметим далее, что

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n - y^2}} \left\{ \lambda_n^{(1)} \int_{x_2}^{x} \frac{dx}{P(x)} + \int_{x_2}^{x} \frac{z''}{zP}\, dx \right\} \qquad (3.2)$$

в силу формулы (2.12)

отсюда, аналогично предыдущему получаем, что $y_1$ имеет, в точке $x = x_2$ 3 непрерывных производных. Из уравнения $z z_1' y' + y'' z_1 + y_1'' z + z y_1' z' = 0$

определим $z_1$, с точностью до $const$

Обозначим

$$R_n(x) = \varphi(x) \left[ z^2 + \varepsilon^2 z_1 \right] W_n \left\{ y + \varepsilon^2 y_1 \right\} \qquad (3.3)$$

Можно убедиться, что $R_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon^2 R_n'' + [v(x) - \lambda_n^{(1)} - \varepsilon^2\lambda_n^{(2)}] R_n - \varepsilon^2 K(x)\varphi(x) W_n(y+\varepsilon^2 y_1) =$$

$$= \varepsilon^6 (y_1'' z_1 + 2y_1' z_1')\varphi(x) W_n'(y+\varepsilon^2 y_1) + [2\varepsilon^6 \{(y_1')^2 y_1 y +$$

$$+ y_1' y' (y_1)^2\} + \varepsilon^8 (y_1')^2 y_1^2] R_n + \varepsilon\varphi''(z^2 + \varepsilon^2 z_1). W_n +$$

$$+ 2\varepsilon\varphi' [(z+\varepsilon^2 z_1) W_n]', \qquad (3.4)$$

где

$$K(x) = z_1'' + \left[\frac{z''}{z} - \lambda_n^2\right] z_1 + (y_1')^2(\mu_n - y^2) - 4y_1' y' y_1 y - (y')^2 y_1^2$$

Последние 2 члена правой части равенства $(3.4)$ имеют порядок $O(e^{-\delta/\varepsilon})$ поскольку $\varphi'$ и $\varphi''$ отлично от нуля лишь в областях, в которых функция Вебера экспоненционально (при $\varepsilon \to 0$ ) мала. Норма в $L_2$ I-го члена правой части равенства имеет порядок $O(\varepsilon^6)$, поскольку $\| W_n' \| = O(\frac{1}{\varepsilon})$

Средний член правой части равенства имеет порядок $O(\varepsilon^6)$.

Применяя рассуждения $(2.8) - (2.12)$, будем иметь

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \varepsilon^4 \lambda_n^{(3)} + o(\varepsilon^4), \qquad (3.5)$$

где

$$\lambda_n^{(3)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{K(x)}{zP}\, dx \qquad (3.6)$$

Тождественное преобразование выражения $(3.6)$ дает [63]

$$\lambda_n^{(3)} = \lambda_n^{(2)} \frac{d\lambda_n^{(2)}}{dn} : \frac{d\lambda_n^{(1)}}{dn} - \frac{(\lambda_n^{(2)})^2}{2} \frac{d^2\lambda_n^{(1)}}{dn^2} : \left(\frac{d\lambda_n^{(1)}}{dn}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{48}\frac{d}{dn}\left[\frac{1}{5}\frac{d^2}{d\lambda^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(v'')^2}{\sqrt{\lambda - v}}dx - \frac{1}{36}\frac{d^4}{d\lambda^4}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(v')^4}{\sqrt{\lambda - v}}dx\right]_{\lambda=\lambda_n^{1}}$$

$$(3.7)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 9.2

В предположениях §1 и §3 существуют собственные значения $\lambda_n$ уравнения $(1.1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \varepsilon^4 \lambda_n^{(3)} + O(\varepsilon^4)$$

при $n\varepsilon \to const$,

где $\lambda_n^1$, $\lambda_n^2$ и $\lambda_n^3$ определены в формулах $(1.2)$, $(2.2)$, $(3.7)$

Из этой теоремы нетрудно получить (аналогично тому как это было сделано в следствиях I и 2) 3-ий член асимптотического разложения собственных значений задач $(1.7)$ гл.1 и $(2.14)$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

## РАЗРЫВЫ В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТУННЕЛЬНОГО ТИПА

### §I. Введение

Метод исследования разрывов решений уравнений волнового типа может быть применен и к изучению асимптотики решений уравнений туннельного и смешанного типа.

На этом мы остановимся менее подробно и рассмотрим только две задачи, тесно связанные, как мы увидим с квазиклассической асимптотикой. Мы рассмотрим асимптотику решений системы уравнений Навье-Стокса при вязкости, стремящейся к нулю вблизи ударных волн - разрывов решений системы квазилинейных уравнений первого порядка.

Далее, мы рассмотрим асимптотику в целом при $\omega \to \infty$ решения задачи

$$\Delta u - \omega^2 c^2(x)\, u = 0 \qquad x = x_1, x_2, x_3 \qquad (I.I)$$

$$u|_\Gamma = f(x)$$

$\Gamma$ - замкнутая гладкая поверхность.

Асимптотика решения такой задачи была известна [17] лишь с точностью до $O\left(\frac{1}{\omega^N}\right)$, где $N$ - любое, т.е. в узкой (порядка $1/\omega$) полоске вблизи границы. Внутри области, ограниченной $\Gamma$, было известно лишь, что $u = O\left(\frac{1}{\omega^\infty}\right)$. Мы дадим здесь асимптотику в целом, т.е. найдем функцию $u_0(x,\omega)$, такую, что $u(x,\omega) = u_0(x,\omega)\left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)$. Эта асимптотика, как мы увидим, испытывает скачки тоже как раз там, где располагаются разрывы квазилинейной системы:

$$(u_0 \operatorname{grad}) u_0 + \operatorname{grad} c^2(x) = 0 .$$

Она определяется характеристиками в смысле пункта 4, § 3 главы I для уравнения (I.I). Эта задача близка к задаче об асимптотике решений уравнения Шредингера в области тени. На этом последнем вопросе, связанном с комплексными решениями уравнений характеристик,

мы остановимся лишь вскользь.

Обе рассмотренные задачи являются лишь частными случаями широкого класса уравнений туннельного типа для которых справедливы аналогичные утверждения.

## § 2. Асимптотика вблизи ударных волн.

### I°. Уравнение Навье-Стокса для суспензии.

I. Рассмотрим решение системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \operatorname{grad}) u + \operatorname{grad} V(x) = \eta \Delta u \tag{2.I}$$

$$x = x_1, x_2, x_3 \qquad u = \{ u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t) \}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(x) \tag{2.2}$$

Iа. Эта постановка задачи необычна. Остановимся на физической модели, которую она описывает.

Рассмотрим двухфазную смесь либо газа со взвешенными в нем капельками жидкости, либо суспензию. Для простоты будем говорить о суспензии. Предположим, что суммарный объем твердых частиц мал по сравнению с объемом жидкости, и что плотность твердой фазы много больше плотности жидкости.

Это значит, что эффективная вязкость $\eta_{эф.}$ суспензии мало отличается от вязкости $\eta$ жидкости. Предположим, что смесь задана во всем пространстве и находится в поле медленно меняющихся во времени и в пространстве сил: потенциал их равен

$$V_0 V\left(\frac{x_1}{\ell}, \frac{x_2}{\ell}, \frac{x_3}{\ell}, \frac{t}{t_0}\right),$$

где $V_0$ характерная энергия, отнесенная к единице объема, $\ell, t_0$ - соответственно характерные длина и время, а $x_1, x_2, x_3$ - координаты точки в трехмерном пространстве. Мы будем считать, что система все время находится в квазистационарном состоянии фазового равновесия. Таким образом мы полагаем, что характерное время $t_0$ больше времени восстановления давления при фазовом равновесии в такой системе, так что

$$\operatorname{grad} V_0 V\left(\frac{x_1}{\ell}, \frac{x_2}{\ell}, \frac{x_3}{\ell}, \frac{t}{t_0}\right) \gg \operatorname{grad} p \qquad (p \text{ -давление})$$

Поэтому в классической системе уравнений Навье-Стокса мы пренебрегаем $\operatorname{grad} p$ и приходим к уравнению 2.I для скорости жидкой фазы суспензии.

Эти предположения приводят к соотношениям:

$$\eta / V_0 t_0 \ll 1, \quad \rho v_0^2 \sim V_0 ,$$

где $v_0 = \ell / t_0$.

Как видим, эти соотношения совпадают с соотношениями пункта 3, §2 гл. I, причем размерность вязкости равна размерности постоянной Планка $h$, отнесенной к единице объема.

Совершенно аналогично можно рассматривать пар в состоянии насыщения со взвешенными в нем капельками жидкости. Это система состоит из двух компонентов - жидкости и пара. Мы рассматриваем лишь уравнение движения одной компоненты - пара, в то время как капля жидкости играет пассивную роль: они поддерживают постоянное давление насыщенного пара. Малекулы пара могут "рождаться" - испаряться из капли, и "уничтожаться" - конденсироваться в каплях x/ .

Заметим, что уравнение Шредингера можно интерпретировать, как уравнение, описывающее поведение пучка невзаимодействующих электронов (как это имеет место, например, в электронной оптике). Но на самом деле система содержит в себе также позитроны и фотоны, а электроны могут рождаться и уничтожаться. В той модели, которую описывает уравнение Шредингера, позитроны и фотоны не участвуют. Но возможно они играют пассивную роль капель?

16. Замена функции вида

$$u(x,t) = \eta \, \mathrm{grad} \, \ln \psi(x,t) \tag{2.3}$$

приводит к уравнению

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta^2}{2} \Delta \psi + v(x)\psi \qquad \psi(x,0) = e^{-\frac{f(x)}{\eta}} \tag{2.4}$$

---

x/ О другой модели, приводящей к этой же задаче см.[74].

Мы видим, что система уравнения Навье-Стокса в такой постановке совпадает с уравнением Шредингера, если вязкость взять чисто мнимой.

Непосредственная связь уравнения Шредингера и системой уравнений Навье-Стокса в указанном выше аспекте, насколько мне известно, не была замечена физиками, хотя о связи уравнений Шредингера с уравнениями типа Навье-Стокса опубликовано много работ (смотри напр. /II/ ).

## 2°. Асимптотика решений уравнения Навье-Стокса и предельный переход при $\eta \to 0$.

2. Бихарактеристическая система в смысле § 3 главы I для уравнения (2.4) имеет вид

$$\dot{x}_i = p_i\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{p^2}{2} - v(x) \tag{2.5}$$

Полагаем

$$x(0) = x_0\,, \quad p(0) = \operatorname{grad} f(x_0)\,, \quad S(0) = f(x_0) \tag{2.6}$$

Обозначим

$$X(x_0,t) = x(t), \quad P(x_0,t) = p(t), \quad S(x_0,t) = S(t)$$

Эта задача, как уже указывалось, сводится к нахождению экстремума функционала

$$\Phi[q(\tau)] = f[q(0)] + \int_{x_0}^{x,t} \left\{ \frac{\dot{q}^2}{2} - v(q) \right\} d\tau \tag{2.7}$$

$$q(t) = x, \quad \dot{q}(0) = \operatorname{grad} f[q(0)]\,.$$

Теорема I.I

Пусть точка $(x,t)$ не является фокальной ни для од-

ной из экстремалей функционала $\Phi[q(\tau)]$ (ср. п. 5°, § I гл. 2). Тогда задача (2.7) имеет лишь конечное число решений

$$q^i(\tau), \quad i=1,\dots,k_0 \quad \text{и}$$

$$u(x,t) = -\eta \,\mathrm{grad}\, \ln \sum_{i=1}^{k_0} \left| \det \left\| \frac{\partial q^i_k(0)}{\partial x_j} \right\| \right|^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{\eta}\Phi[q^i(\tau)]\right\} + O(\eta^2) =$$

$$= -\eta \,\mathrm{grad}\, \ln \sum_{i=1}^{k_0} \left| \det \left\| \frac{\partial X_k(x_0^i, t)}{\partial x_{0j}} \right\| \right|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{\eta} S(x_0^i, t\right\} + O(\eta^2)$$

где $x_0^i = x_0^i(x,t)$ определяется из уравнения

$$X(x_0, t) = x$$

3. Следствие. Пусть $V(x)$ – аналитична; $V(x) = const + O\left(\frac{1}{|x|^{2n}}\right)$, тогда в каждой точке $x, t$ существует абсолютный минимум $\Phi_{min}(x,t)$ функционала $\Phi$, являющийся почти везде дифференцируемой функцией $x$ и

$$\lim_{\eta\to 0} u(x,t) = \mathrm{grad}\, \Phi_{min}(x,t)$$

почти всюду по $x$.

Как известно, $\lim_{\eta\to 0} u(x,t) = \mathrm{grad}\, \Phi_{min}$ является разрывным решением квазилинейной системы уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + (u_0 \nabla) u_0 + \mathrm{grad}\, V(x) = 0$$

построенным в [57], [44, 21], [37], [46, 47], [85]. Таким образом, разрывы решения $u_0$ могут происходить лишь на поверхностях



33-1419

$$S[x_0^i(x,t),t] = S(x_0^j(x,t),t),$$

которые мы будем называть поверхностями равнодействия и будем обозначать $\Gamma_{ij}$. При этом в определении разрыва $u_0(x,t)$ участвуют лишь те $\Gamma_{ij}$, у которых $\gamma^i$ и $\gamma^j$ (индексы по Морсу) равны нулю.

3°. Ударные волны вероятности для решения уравнения Шредингера.

4. (Следствие из теоремы 2.6). Рассмотрим случай $n=2$.

Пусть выполнены условия пункта 3. (п°3 §1) Тогда интеграл от квадрата модуля решения уравнения Шредингера, взятый по такой кривой $\gamma$, что $\Gamma_{ij} \cap \gamma$ при всех $i,j$ имеет меру нуль, удовлетворяет соотношению

$$\int_\gamma |\psi(x,t)|^2 dl \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{k_0} \int_\gamma \frac{\varphi^2[x_0^k(x,t)]}{|\mathcal{J}[x_0^k(x,t),t|} dl$$

Это означает, что при $h \to 0$ осуществляется классическое сложение вероятностей на кривой $\gamma$. Интеграл от квадрата модуля решения $\psi(x,t)$ уравнения Шредингера, взятый по отрезку $l_{ij}$ кривой равнодействия $\Gamma_{ij}$ такому, что $l_{ij} \cap \Gamma_{km}$ имеет меру нуль, если либо $k \neq i$, либо $m \neq j$, удовлетворяют соотношению:

$$\int_{l_{ij}} |\psi(x,t)|^2 d\vec{l} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_{l_{ij}} \left| e^{i\frac{\gamma^i-\gamma^j}{2}\pi} \frac{\varphi[x_0^i(x,t)]}{|\mathcal{J}[x_0^i(x,t),t|^{1/2}} + \frac{\varphi[x_0^j(x,t)]}{|\mathcal{J}(x_0^j(x,t),t|^{1/2}} \right|^2 d\vec{l}$$

$$+ \sum_{m\neq i,j}^{k_0} \int_{l_{ij}} \frac{\varphi^2(x_0^m(x,t))}{|\mathcal{J}[x_0^m(x,t),t]|} d\vec{l}$$

Таким образом, в зависимости от индексов по Морсу $\gamma^i$ и $\gamma^j$, вероятность пребывания электрона на кривой $\Gamma_{ij}$ в квазиклассическом приближении будет в результате интерференции либо удваиваться (если $\gamma^i-\gamma^j$ нечетно) по сравнению с классическим результатом, либо обращаться в нуль (если $\gamma^i-\gamma^j$ четно), при условии, что начальная вероятность равна I в области влияния. Этот качественный эффект не был известен в физической литературе.

§ 3. Краевая задача и пограничный слой.

I. Рассмотрим туннельное уравнение вида

$$\Delta u - \omega^2 c^2(x)\, u = 0 \qquad x = x_1, x_2$$
$$u|_\Gamma = f(s) \qquad c^2(x) \geq \alpha > 0 \quad , \tag{3.I}$$

где $c(x)$, $f(s)$ - аналитические функции действительных аргументов, а $\Gamma$ - аналитическая замкнутая кривая, $s$ - параметр на кривой (длина дуги). Уравнение бихарактеристик в смысле § 3 гл. I имеет вид

$$\ddot{x}_i = -\frac{\partial c^2}{\partial x_i} \qquad x(0) = x_0(s) \qquad s \in \Gamma \tag{3.2}$$
$$x(0) = c[x_0(s)]\,\vec{n} \quad ,$$

где $\vec{n}$ - нормаль к кривой $\Gamma$. Полагаем $X(s,t) = x(t)$.

Имеет место следующее предложение.

Теорема 2

Пусть точка $x$, принадлежащая области, ограниченной кривой $\Gamma$, не является фокусом задачи (3.2). Тогда

система уравнений $X(s,t)=x$ будет иметь конечное число $K_0$ решений:

$$s^k = s^k(x)\,, \quad t^k = t^k(x)\,, \quad k = 1,\dots,K_0$$

и решение задачи (3.I) может быть представлено в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{K_0} f(s^k) \left| \frac{\partial(s^k, t^k)}{\partial(x_1, x_2)} \right|^{1/2} e^{-\omega \int_0^{t_k} c^2[X(s^k,\tau)]d\tau} \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right),$$

где $s^k = s^k(x)$, $t^k = t^k(x)$

Нетрудно убедиться, что и в этом случае асимптотика испытывает скачки на поверхностях $\Gamma_{ij}$ таких, что $\gamma^i - \gamma^j = 0$.

2. Для асимптотики решений уравнений важны не только мнимые или действительные решения характеристических уравнений. Асимптотика в области, в которую не проникает классическая частица (область тени) для стационарного уравнения Шредингера с аналитическими коэффициентами определяется комплексными решениями уравнения Ньютона. Иначе говоря, если не существует действительного решения краевой задачи, то асимптотика определяется комплексными решениями этой задачи. Могут существовать и комплексные фокусы, причем асимптотика в них может иметь менее высокий порядок малости, чем в близких точках. Таким образом, комплексный фокус и в некотором смысле оказывается ярче чем окружающие точки. [51, 4]

## Дополнение

### О существовании решений уравнений Гамильтона в большом.

В. Дубнов

<u>Лемма.</u> Пусть функция $\mathcal{H}(p,y,t)$ $(p,y\in R^n;\ t\in R^1)$, непрерывно дифференцируемая при всех значениях $p,y,t$, удовлетворяет следующим условиям:

$p = O(\mathcal{H}^s)$ при $p\to\infty$

$\mathcal{H}_t = O(1+|p|^r)$; $\mathcal{H}_p < C(|p|)$, где $C(x)$ - некоторая непрерывная функция, определенная на $[0,\infty)$; числа $r$ и $s$ удовлетворяют неравенству $rs\leqslant 1$; все $O$ - оценки равномерны по $y$ и $t$.

Тогда для функций $p(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \dot y = \mathcal{H}_p \\ \dot p = -\mathcal{H}_y \end{cases} \tag{1}$$

и условиям $p(0)=p_0$, $y(0)=y_0$ (2)

имеют место оценки

$$|p(t)| < a(t)$$
$$|y_0 - y(t)| < b(t)$$

при $t\geqslant 0$; $a(t)$ и $b(t)$ - некоторые определенные на $[0,\infty)$ функции.

<u>Доказательство.</u>

Как известно $\dot{\mathcal{H}} \equiv \frac{d}{dt}\mathcal{H}(p(t),y(t),t) = \mathcal{H}_t$. Поэтому $\dot{\mathcal{H}} = O(1+|\mathcal{H}|^{sr})$, т.е. $|\dot{\mathcal{H}}| < A(1+|\mathcal{H}|^{sr})$, $A$ - некоторая константа. Пусть $g(\mathcal{H})$ определяется формулой $g(\mathcal{H}) \equiv \int\limits_{\mathcal{H}(p_0,y_0,0)}^{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{A(1+|\mathcal{H}|^{sr})}$. Очевидно, функция $g$ не убывает, имеет обратную функцию $g^{-1}$,

определенную на всей вещественной прямой, и удовлетворяет неравенству

$$\left| g(\mathcal{H}(p(t), y(t), t)) \right| = \left| \int_0^t \frac{\dot{\mathcal{H}}\, dt}{A(1+|\mathcal{H}|^{s\tau})} \right| < t .$$

Следовательно, $|\mathcal{H}(p(t), y(t), t)| < Max\{g^{-1}(t), -g^{-1}(-t)\}$ и $|p(t)| = O\{[Max\{g^{-1}(t), -g^{-1}(-t)\}]^s\}$

при $p \to \infty$, что доказывает первую оценку леммы. Получим оценку для $|y_0 - y(t)|$ (функцию $C(x)$ можно считать неубывающей):

$$|y_0 - y(t)| = \left| \int_0^t \mathcal{H}_p(p(t), y(t), t)\, dt \right| < t\, C(a(t)) \equiv b(t).$$

Лемма доказана.

Замечание. Обычно если $\mathcal{H}(p, y, t)$ - алгебраическая функция $p$, такая, что $\lim\limits_{|p|\to\infty} \mathcal{H}(p, y, t) = \infty$, то условия леммы удовлетворяются.

СЛЕДСТВИЕ.

В условиях леммы решение задачи (I), (2) существует при $0 \le t < \infty$.

Действительно, по теореме Пеано через точку $(p_0, y_0, 0)$ можно провести интегральную кривую системы (I), которую можно продолжить до границы любой замкнутой области полупространства $t > 0$. Выберем в качестве такой области $\bar{G}$ прямое произведение следующих трех областей:

1) $\{0 \le t \le T\} \subset R^1$, $T$ - любое положительное число;

2) $\{|p| \le a(T)\} \subset R^n$,

3) $\{|y - y_0| \le b(T)\} \subset R^n$.

Из оценок леммы следует, что интегральная кривая системы (I), проходящая через $(p_0, y_0, 0)$ пересечет границу $\bar{G}$ в некоторой точке $(p_1, y_1, T)$, и т.д.

$2^0$. Рассмотрим слабо связанную гиперболическую систему с различными характеристиками

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \sum_{k_0+k_1+\dots+k_n \le m} a_{k_0 k_1 \dots k_n}(t,x) \frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = 0, \quad (1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_r)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$

$a_{k_0 k_1 \dots k_n}$ - матрицы, имеющие $r$ строк и $r$ столбцов и пропорциональные единичной матрице при $k_0 + k_1 + \dots + k_n = m$

Введём обозначение

$$A(p_0, p) \equiv A(p_0, p; t, x) \equiv \quad (2)$$

$$\equiv p_0^m + \sum_{k_0+k_1+\dots+k_n = m} a_{k_0 k_1 \dots k_n}(t,x)\, p_0^{k_0} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$$

Здесь $p = (p_1 \dots p_n)$

Очевидно, $A(p_0, p)$ - однородный полином степени $m$ от $p_0$ и компонент $p$.

Характеристическим уравнением для (I), как известно, является уравнение

$$A\left(\frac{\partial S}{\partial t}, \nabla S\right) = 0 \quad (3)$$

В силу того, что система (I) гиперболична и имеет различные характеристики, $A(p_0, p)$ можно представить в виде

$$A(p_0, p; t, x) = \left(p_0 + \mathcal{H}_1(p,x,t)\right) \dots \left(p_0 + \mathcal{H}_m(p,x,t)\right) \quad (3a)$$

Функции $\mathcal{H}_i(p,x,t)$ будем называть функциями Гамильтона для полинома $A(p_0, p)$.

Каждой функции Гамильтона $\mathcal{H}_i$ соответствует бихарактеристическая для (I) система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{cases} \qquad (4)$$

Индекс у функции Гамильтона здесь и далее опускаем.

Сделаем следующие 3 предположения

а) Коэффициенты системы (I) непрерывно дифференцируемы всюду и ограничены вместе с их первыми производными по $t$.

б) Корни уравнения $A(p_0, p) = 0$, рассматриваемого как уравнение относительно $p_0$, больше по модулю, чем некоторая константа $\alpha > 0$, если $|p| = 1$

в) При $|p| = 1$, $\left|\dfrac{\partial A}{\partial p_0}\right| \geq \beta > 0$.

При сделанных предположениях имеет место

Лемма

Система (4) имеет при $0 \leq t < \infty$ решение, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $p(0) = p_0 \neq 0$.

Доказательство.

Так как $A$ непрерывно дифференцируемо и $p_0$ представимо в виде ($3a$), то $\mathcal{H}$ непрерывно дифференцируемо, причем

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \Big/ \frac{\partial A}{\partial p_0} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial p} \Big/ \frac{\partial A}{\partial p_0} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \Big/ \frac{\partial A}{\partial p_0} \qquad (7)$$

Функция $A$ - однородная степени $m$ по $p_0$ и $p$, поэтому $\mathcal{H}$ - однородная функция первой степени по $p$ :

$$\mathcal{H}(p,x,t)=|p|\,\mathcal{H}\left(\frac{p}{|p|},x,t\right)=|p|\,\mathcal{H}(\tilde{p},x,t) \tag{8}$$

где $\tilde{p}$ принадлежит единичной сфере и, следовательно, $|\mathcal{H}(\tilde{p},x)|>\alpha>0$. Поэтому

$$|p|<\frac{1}{\alpha}|\mathcal{H}(p,x,t)| \tag{9}$$

$\partial\mathcal{H}/\partial t$ - также однородная первой степени по $p$ функция; следовательно,

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right|=|p|\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\left(\frac{p}{|p|},x,t\right)\right| \tag{10}$$

Поскольку $|H|<K$ при $|p|=1$, где $K$ - некоторая константа (это следует из ограниченности коэффициентов системы (1) ), то учитывая в) и (5) получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\left(\frac{p}{|p|},x,t\right)\right|<M \tag{11}$$

$M$ - некоторая константа. Поэтому

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right|<M|p| \tag{12}$$

Из (6) и однородности $A$ следует оценка

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\right|<M_1|p|^m \tag{13}$$

$M_1=const$

Получим теперь априорные оценки решения системы (4), пользуясь неравенствами (9), (12), (13). Пусть $p(t)$, $x(t)$

удовлетворяют системе (4).

Тогда $\dfrac{d\,\mathcal{H}(p(t),x(t),t)}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$.

В этом легко убедиться непосредственной подстановкой.

Будем для краткости писать $\dot{\mathcal{H}}$ вместо $\dfrac{d\,\mathcal{H}}{dt}$.

Из (9) и (I2) получим

$$|\dot{\mathcal{H}}| < \frac{M}{\alpha}\,|\mathcal{H}|, \qquad (I4)$$

откуда следует (для определенности считаем $\mathcal{H}(x_0, p_0, 0) \equiv \mathcal{H}_0 > 0$)

$$\mathcal{H}_0\, e^{-\frac{M}{\alpha}t} < \mathcal{H} < \mathcal{H}_0\, e^{\frac{M}{\alpha}t} \qquad (I5)$$

Теперь с помощью (9) получим оценки

$$|p(t)| < \frac{\mathcal{H}_0\, e^{\frac{M}{\alpha}t}}{\alpha}, \qquad (I6)$$

а из (8)

$$|p(t)| > \frac{\mathcal{H}_0\, e^{-\frac{M}{\alpha}t}}{\max\limits_{|p|=1} \mathcal{H}(p,x,t)} > M_2\, \mathcal{H}_0\, e^{-\frac{M}{\alpha}t} \qquad (I7)$$

$M_2 = const$

Наконец, из (I3) и первого уравнения системы (4) получаем

$$|x(t) - x_0| < t\, M_1\, \mathcal{H}_0^m\, e^{\frac{Mm}{\alpha}t} \qquad (I8)$$

По теореме Пеано через точку $(p_0, x_0, 0)$ можно провести интегральную кривую системы (4), которую можно продолжить до границы любой замкнутой подобласти области $\{t > -\varepsilon\}$ $p, x, t$ - пространства. Выберем в качестве такой подобласти область $\bar{G}$, являющуюся произведением следующих трех областей:

1) области $0 \leq t \leq t_0$ $t$ - прямой

2) области

$$M_2 \mathcal{H}_0 e^{-\frac{M}{\alpha} t_0} \leq |p| \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{H}_0 e^{\frac{M}{\alpha} t_0}$$

$p$ - пространства

3) области $|x - x_0| \leq t_0 M_1 \mathcal{H}_0^m e^{\frac{Mm}{\alpha} t_0}$

$x$ - пространства.

Из оценок (16) - (18) следует, что интегральная кривая системы (5), проходящая через $(p_0, x_0, 0)$ пересечет границу $\bar{G}$ в некоторой точке $(p_1, x_1, t_0)$, что и доказывает существование решения системы (4) при $0 \leq t \leq t_0$ ($t_0$ - любое).

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.


1. Абрагам (Abraham R)
Transversality in manifolds of mappings „Bull. Amer. Math. Soc.", 1963, 63, № 4, 470-474

2. Адамар (Hadamar.)
Lectures on Cauchy's problem, Jale University Press, 1923.

3. Адрианова Л.Я.
О неприводимости систем $n$ линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. "Вестник ЛГУ", сер. матем. и мех., 1962, вып. 2, стр.14-24.

4. Александров П.С.
Комбинаторная топология, Гостехтеориздат, М.-Л., 1947.

5. Алексеев А.С., Гельчинский Б.Я.
Лучевой метод вычисления интенсивности головных волн. сб. "Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич.волн", Изд-во ЛГУ, 1961.

6. Бабич В.М.
   1) Фундаментальное решение гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. "Матем. сб.", 1960, т. 52 (94), 2, № 2.
   2) Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики. Сб. "Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич. волн", изд-во ЛГУ, 1961, стр. 115-145.
   3) Аналитическое продолжение решений волнового уравнения в комплексную область и каустики, там же, стр. 145-153.

7. Бернштейн С.Н.

Собрание сочинений, т. 3, изд-во АН СССР, 1960.

8. Биркгофф Г.Д. (Birkhoff G. D)
Quantum mechanics and asymptotic series, Amer. Math. Soc, 1933, 39, 681-700

9. Блохинцев Д.И.

Акустика неоднородной движущейся жидкости. Гостехтеориздат, М.-Л., 1946.

10. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.

Введение в теорию квантованных полей, Гостехтеориздат, М., 1957.

11. Бом Д.

О возможности интерпретации квантовой теории. ст. I, "Вопросы причинности в квантовой механике", ИЛ, М., 1955.

12. Борн М. (Born M.)
Vorlesungen über Atommechanic, Berlin, 1925

13. Борн М., Вольф (Born M.)
Principles of Optics, „Pergamon Press" 1960.

14. Бреховских Л.М.

1) Волны в слоистых средах, изд-во АН СССР, 1956.

2) Фокусировка звуковых волн неоднородными средами. "Акуст. журн.", 1956, 2, № 2, стр. 124-132.

15. Виленкин Н.Я. и др.

Функциональный анализ, "Наука", М., 1964.



34-1419

16. Вишик М.И.

Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения "Матем. сб.", 1956, т. 39 (81), № 1, стр. 51-148.

17. Вишик М.И. и Люстерник Л.А.

Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.
1957, 12 : 5 (77), стр. 3-122.

18. Гавурин М.К.

1) Приближенное разыскание собственных чисел и теория возмущений. 1957. 12 : 1 (73), стр.173-175.

2) Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора. ДАН СССР, 1954, 96, стр. 1093-1095.

19. Галанин А.Д. ( Galanin A.D )
Untersuchung der Eigenshaften des Electronen und Mesonenspins in der Klassischen Nährung. „J. of Phys", 1942, 6, N 1-2, 35 (USSR).

20. Гантмахер Ф.Р.

Теория матриц, Гостехиздат, М.-Л., 1953.

21. Гельфанд И.М.

Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, М., 1951.

22. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.

1) Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1959.

2) Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1958.

23. Глазман И.М.
Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963.

24. Глезер В.
Основы электронной оптики, Гостехтеориздат, М., 1957.

25. Гординг Л.
Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, М., 1961.

26. Гординг, Катаке, Лере (Gårding L., Katake T., Leray J.) Uniformisation... (Probleme de Cauchy), College de France, 1963.

27. Гроенволд (Groenewold H.J.)
Quasi-classical path integrals. „Math. fis. medd. Kgl. danske vid. selskab," 1956, 30, N 19, 1-34.

28. Данфорд Н., Шварц, Дж. Т.
Линейные операторы (общая теория), ИЛ., М., 1962.

29. Дубровский В.А. и Скуридин Г.А.
Асимптотические разложения в волновой механике. "Журнал вычислит. матем. и матем. физики", 1964, 4, № 5, стр. 848-870.

30. Зволинский Н.В., Скуридин Г.А.
Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости. "Изв-я АН СССР", сер. геофиз., 1956, № 2, стр. 134-143.

31. Зейферт Г. и Трельфалль В.

Вариационное исчисление в целом, ИЛ, М., 1947.

32. Зоммерфельд А.

1) Оптика, ИЛ, М., 1953.

2) Строение атома и спектры, Гостехтеориздат, М., 1956.

33. Камке Э.

Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, "Наука", М., 1965.

34. Като

1) Integration of the equation of evolution in a Banach space. "Математика", 1958, 2 : 4, стр. 115-135.

2) Perturbation theory of semi-bounded operators. „Math. Ann.", 1953, 125; 435-447

35. Колмогоров А.Н., Фомин С.В.

Элементы функционального анализа. Изд-во МГУ, вып. 1, 1954; вып. 2, 1960.

36. Крейн М.Г.

О формуле следов в теории возмущений, "Матем.сб.", 1953, 33 (75), стр. 597-626.

37. Кузнецов Н.Н., Рождественский Б.Л.

Решение задачи Коши для одной системы квазилинейных уравнений со многими независимыми переменными. "Ж. вычислит. матем. и матем. физики", 1961, 1, № 2.

38. Курант Р.

Уравнение с частными производными, "Мир", М., 1964.

39. Курант Р., Гильберт Д.
Методы математической физики, т. 2, Гостехтеориздат, М.-Л., 1951.

40. Курант Р., Лакс П. (Courant R., Lax P.)
The propagation of discontinuities in wave motion. Proc. Nat. Acad. Sci, USA, 1956, 42, № 11, 872-876.

41. Кучеренко В.
Дипломная работа, МГУ, Физфак, 1968.

42. Лаврентьев М.М.
О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, изд-во Сиб. отд-я АН СССР, 1962.

43. Лаврентьев М.А. и Люстерник Л.А.
Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2, Гостехтеориздат, М.-Л., 1935.

44. Ладыженская О.А.
1) О решении нестационарных операторных уравнений различных типов. ДАН СССР, 1955, т. 102, № 2, стр. 207-210.
2) О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений, как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении "коэффициента вязкости" к нулю, ДАН СССР, 1956, т. III, № 2, стр. 291-294.

45. Ладыженская О.А. и Фаддеев Л.Д.
К теории возмущений непрерывного спектра. ДАН СССР, 1958, т. 120, стр. 1187-1190.


34-1418

46. Лакс Р.Д. (Lax R. D)

1) Asymptotic solutions of oscillatory initial value prolems, Duke Math. Jornal, 1957, 24, N 4, 627-646

2) Hyperbolic systems of conservation lows II, Communs. Pure and Appl. Mach., 1957, 10, 537-566.

47. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.

Квантовая механика. Физматгиз, М., 1963.

48. Левин М.Л., Рытов С.М.

О переходе к геометрическому приближению в теории упругости. "Акуст. ж.", 1956, 2, 2, стр. 173.

49. Лере (Leray J.)

Lectures on hyperbolic equations with variable coefficient. „Inst. for Adv. Study", Princeton, 1952

50. Людвиг Д. (Ludwig D.)

Exact and asymptotic solutions of the Couchy problem. „Communs. Pure and Appl. Math." 1960, 13, N3, 473-508.

51. Маслов В.П.

1) Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики I. "Ж. вычислит.матем. и матем. физ.", 1961, 1, вып. 1, стр. 113-128 и II там же, 1961, 1, вып. 4, стр. 638-663.

2) Quasiclassical asymptotic solutions of Dirac's system of equations in the large. „Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations. Acad. of Sciences of the USSR, M., 1963.

3) Квазиклассическая асимптотика решения уравнения Дирака, УМН, 1963, 18, 4(112), стр. 220-222.

4) Задача рассеяния в квазиклассическом приближении, ДАН СССР, 1963, 151, № 2, стр. 306-309.

5) Математическое обоснование предельного перехода из квантовой механики в классическую. "Научн.докл. высш.школы", физ-матем.науки, 1958, № 1, стр.63-67.

6) Асимптотика собственных значений для уравнения Шредингера в одномерном и радиально-симметрическом случае. УМН, 1960, т. ХУ, в. 4 (94), стр. 220-221.

7) Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной. ДАН СССР, 1956, т. 111, № 5, стр. 977-980.

8) О предельном поведении некоторых квантово-механических величин. ДАН СССР, 1954, т. 44, № 4, стр. 623-626.

9) Теория возмущений многомерного уравнения Шредингера, УМН, 1961, т. 16,3(99), стр. 217-218.

10) Поведение на бесконечности собственных функций уравнений Шредингера. УМН, 1964, т.19,1(115),стр. 199-201.

11) Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях, ДАН СССР, 1956, т. 111, № 3, стр. 531-534.

12) О переходе квантовой механики в классическую в многомерном случае, УМН, 1960, т. 15, 1 (91), стр. 213-219.

13) Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному, ДАН СССР, 1956, т.109, № 2, стр. 267-270.

14) Метод ВКБ в многомерном случае. Дополнение к кн. Хединга, Дж "Введение в метод фазового интеграла", "Мир", М., 1965 (в печати).

52. Милнор Дж.
Теория Морса, "Мир", М., 1965.

53. Морс (Morse M.)
The calculus of variations in the large. „Amer. Math. Soc. Cologuium Publ." 1934, 18, New York.

54. Морс Ф.М. и Фешбах Г.
Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, М., 1958; т.2, ИЛ, М., 1960.

55. Морет (Morette Cecile)
On the definition and approximation of Feynman path intgral. Phys. Rev., 1951, 81, 848-852.

56. Натансон И.П.
Теория функций вещественной переменной, ГИТТЛ, М., 1950.

57. Олейник О.А.
1) О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "неисчезающей вязкости". УМН, 1959, т. XIV, в. 2 (86), 160-164.
2) Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. УМН, 1959, т. XII, в. 3 (75), стр.3.73.

58. Паули (Pauli W.)
Dirac's Wellengleichung des Electrons und geometrishe Optik. Helv. Phys. Acta, 1932, 5, №3, 179.

59. Петровский И.Г.
1) Über das Cauchysche Problem für system von partiellen Differential gleichungen. "Матем. сб.", 2 (49), стр.815-870.
2) Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.
3) Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, "Наука", М., 1964.

60. Петрошень Г.И.
Методика построения решений задач для сложных сред. "Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич. волн". сб. I, Гостехтеориздат, М.-Л., 1957.

61. Повзнер А.Я., Сухаревский И.В.
О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения, "Матем. сб.", 1960, т. 51, (93):1, стр. 3-26.

62. Понтрягин Л.С.
1) Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, М., 1954.
2) Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий "Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова", т. XLV, изд-во АН СССР, М., 1955.

63. Пытьев Ю.П.
О связи классической механики и волновой.
ДАН СССР, 1963, 149, № 2, стр. 298-301.

64. Реллих (Rellich F.)
Störungs theorie der Spectralzerlegung I, „Math. Ann" 1936, 113, 600-619; там же, II3, 677-685; III, там же, II6, 555-570; IУ, там же, II7, 1941, 356-382; У, там же, 1943, II8, стр. 462-484.

65. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б.
Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.

66. Рубинов, Келлер (Rubinow Y., Keller J.)
Asymptotic solution of Dirac equation. Phys. Rev., 1963, 131, №6, 2789-2796.

67. Руммер Ю.Б.
Исследования по пятиоптике, Гостехиздат, М., 1956.

68. Рытов, С.М.
Модулированные колебания и волны. "Труды ФИАН", 1938, 2, № I, стр. I.

69. Саврасов Ю.С.
Вычисление собственных значений для уравнения Шредингера, дипл. раб., МГУ, физфак, 1960.

70. Секефальви-Надь (Sz.-Nady, B. von)
Spectraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. „Engebnisse der Math.", v. 5, J. Springer, Berlin, 1942.

71. Смирнов В.И.
Курс высшей математики, т. IУ, Гостехтеориздат, М.-Л., 1951.

72. Соболев С.Л.

1) Волновое уравнение для неоднородной среды. "Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР", 1930, № 6.

2) Некоторые применения функционального анализа в математической физике, изд-во ЛГУ, Л., 1950.

73. Соломяк М.З.

О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора, ДАН СССР, 1953, т. 90, стр. 29-32.

74. Солуян С.И., Хохлов Р.В.

Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде, "Вестник МГУ", 1961, № 3, стр. 52-61.

75. Стэррок П.А.

Статистическая и динамическая электронная оптика. Теория фокусировки в линзах, отклоняющих устройствах и ускорителях, ИЛ, М., 1958.

76. Титчмарш Э.Ч.

Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, ИЛ,М., 1961.

77. Тихонов А.Н.

1) О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, ДАН СССР, 1963, 151, № 3, 501.

2) О регуляризации некорректно поставленных задач, ДАН СССР, 1963, 153, № 3, 49.

78. Тихонов А.Н., Гласко В.Б.

О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма I рода, "Ж. вычисл. матем. и матем. физики", 1964, 4, № 2, стр. 564-570.

79. Федорюк М.В.

I) Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, стр. 671-683.

2) Метод стационарной фазы для многомерных интегралов, там же, 1962, 2, № I, стр. 145-150.

OV 80. Фейнман Р.

Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механики. Сб. "Вопросы причинности в квантовой механике", ИЛ, М., 1955.

81. Фок В.А.

I) Обобщение отражательных формул на случаи отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы, Ж ЭТФ, 1950, 20, № II, стр. 966-978.

V 2) Работы по квантовой теории поля. Изд-во ЛГУ, 1957.

3) О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике, "Вестник ЛГУ", 1959, № 16, 67.

4) О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике, приложение к книге Дирака "Принципы квантовой механики", Физматгиз, М., 1960.

82. Фридлендер Ф.

Звуковые импульсы, ИЛ, М., 1962.

83. Фридрихс, Келлер (Friedrichs K.O., Keller J.B)

Geometrical acoustics II. Diffraction, reflection and refraction of a weak spherical or cylindrical shock at a plane interface. „J Appl Phys," 26, 961-966.

84. Хилле Э. и Филлипс Р.С.

Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.

85. Хопф (Hopf E.)

The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. „Communs Pure and Appl. Math.", 1950, 3, N3, 201-230.

86. Швебер, С.

Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, М., 1963.

87. Шифф, Л.

Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.

88. Шноль Э.Э.

О поведении собственных функций уравнения Шредингера, "Матем. сб.", 1957, т. 42 (84), № 3.

89. Эллиот (Elliott J.)

The equation of evolution in a Banach space. Trans. Amer. Math Soc. 1962, 103, N3, 470-483.

90. Эрдейи, А.

Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

## Часть I

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Глава 3

СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ.



Глава 4

ВОЗМУЩЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ.

Глава 5

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ.



Часть II

ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В БОЛЬШОМ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Глава I

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

## Глава 2

КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР.





35-141

Глава 3

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.



Глава 4

УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Глава 5

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МАЛОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОГО ТИПА.



Глава 6

АСИМПТОТИКА В МАЛОМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

## Глава 7

## АСИМПТОТИКА В БОЛЬШОМ РЕШЕНИИ АБСТРАКТНЫХ УРАВНЕНИЙ.



## Глава 8

## КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ С $\left[\frac{n}{2}\right]+4$ РАЗА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Л 49490 Подписано к печати 26.УI.1965 г. Формат 60x90 I/16
физ.печ.л. 34,5 уч. изд. л. 20,96. Заказ I4I9. Тираж 1000 экз.Цена 83коп

Отпечатано на ротапринтах в типографии Изд-ва МГУ. Москва, Ленгоры

## Примечания

Стр.35. Таким образом, по данному $\lambda$ определяется точка $\lambda^{\circ}$
3 строка сн. спектра оператора $\hat{L}^{\circ}$, и расстояние $d$ от $\lambda^{\circ}$ до ближайшей точки спектра $\hat{L}^{\circ}$. Затем по $d$ и $v(x,\varepsilon)$ определяется радиус видимости $r_{\varepsilon} = \frac{x_{\varepsilon}}{2}$ с помощью неравенства

$$\varepsilon\, |v(x,\varepsilon)| \leqslant \frac{d}{2+\sigma} \quad (\sigma > 0) \quad \text{при} \quad x \leqslant x_{\varepsilon}$$

Стр.189. Для финитной функции $\varphi(\xi)$ с носителем $\Omega$, принадлежащей
9 сн. $D(\frac{d}{d\xi}A)$ имеем $A\Phi_A^{x}\Phi_A^{p}\varphi(x) = \Phi_A^{x}\Phi_A^{p}A\varphi(x) = \frac{A}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{ipxA}\,dp\int_{\Omega} e^{-ip\xi A}A\varphi(\xi)\,d\xi =$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega}\frac{\sin[N(x-\xi)A]}{x-\xi}A\varphi(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}N^{-1}\int_{\Omega}\cos[N(x-\xi)A]\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{x-\xi}\right)d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{cN}\frac{\sin At}{t}A\varphi(x)\,dt = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\Big\{\int_{0}^{\sqrt{N}} e^{-t/\sqrt{N}}\,\frac{\sin A\beta t}{t}e^{-\alpha At}A\varphi(x)\,dt\,\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}}$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\operatorname{Im}\int_{\sqrt{N}}^{cN}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-t/\sqrt{N}}}{t}\right)(-\alpha+i\beta)^{-1}e^{-\alpha At+iA\beta t}\,\varphi(x)\,dt\,\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{cN}e^{-t/\sqrt{N}}\,\frac{\sin A\beta t}{t}\,e^{-\alpha At}\,A\varphi(x)\,dt\,\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int d\beta\, A\left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{N}}+\alpha A-iA\beta\right)^{-1}+\left(\tfrac{1}{\sqrt{N}}+\alpha A-iA\beta\right)^{-1}A\varphi(x)\right]\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}} = A\varphi(x)$$

Отсюда $\Phi_A^{x}\Phi_A^{p}\varphi = \varphi$. По замыканию $\Phi_A^{x}\Phi_A^{p} = 1$

Стр. 190. Определение характеристик для уравнения в $p$ – представ-
7 св. лении следует из общего определения, данного в §3 №4.

Стр.205. Этот случай отвечает разрыву на гиперповерхности $\varphi(x) = const$
3 св.

Стр.223. Эти рассуждения распространяются на общий случай.
10 св.

Стр.223,229,250,264. Напомним, что все утверждения будут доказаны в главах 5–8.

Стр.237. В самом деле, если таких точек бесконечное число, то они
7 св. имеют предельную точку. Эта точка, очевидно, будет фокальной.

Стр.252. Отсюда будет следовать соотношение (I.2) в многомерном
9 св. случае.

Стр.270. Предположим противное, что $rang\left\|\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_j}\right\|_{\alpha=\bar{\alpha}} = 0$, тогда в силу
13 св. леммы 2.I $det\left\|\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j}\right\|_{\alpha=\bar{\alpha}} \neq 0$. Продифференцировав равенство $\sum p_i^{2} = \frac{const}{c^{2}(Q)}$ (I) по $\alpha$, получим при $\alpha=\bar{\alpha}$ $\sum_i P_i\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} = 0$.
Отсюда $P_i|_{\alpha=\bar{\alpha}} = 0,\ i=1\ldots n$, что невозможно в силу (I).

Стр.281. Т.е. пространство функций от $x_1$, принадлежащих $W_2^{K}(R^1)$
8 св. при $K = 1,2,\ldots$

Стр.285. Достаточно, чтобы матрицы вида $\|(X_\nu, \mathcal{F}_i X_\nu)\|_{\nu,\mu \leqslant r \leqslant \infty}$, где $\mathcal{F}_i$ всевозможные производные оператора $\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, h)$ по параметрам, имели общее инвариантное конечномерное подпространство размерности $r$, не зависящей от параметров $p, x, t$ при $p\in\Omega_p$, $x\in\Omega_x$, $t\in[0,T]$. В этом случае нужно рассматривать лишь те функции $X_\nu^{+}$ и $X_\nu$, которые порождают это подпространство.

Стр.288. В формуле (2.7) $X_\nu(P(\alpha,t), Q(\alpha,t), t) \equiv X_\nu(p, p_{n+1}, q, t)$
6 сн.

при $p = P(\alpha,t)$, $p_{n+1} = H(P(\alpha,t), Q(\alpha,t), t)$, $q = Q(\alpha,t)$

Стр.290. а) Напомним, что оператор $\hat{\mathcal{L}}\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right)$
5 св.

определяется следующим образом: $\hat{\mathcal{L}}\varphi(x) = \Phi_A^{p_n}\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, A)\,\Phi_A^{x_n}\varphi(x)$,

где $\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, A)$ оператор в $B^{\infty}$, коммутирующий с A и разлагающийся в асимптотический ряд по степеням резольвенты $(A-i)^{-1}$.

в) В выражении для $\gamma$, приведенном в формуле (2.8), в данном случае надо заменить $1/h$ на $A$.

с) В выражении (2.10) $X_\nu[P(\alpha,t), Q(\alpha,t), t] \equiv X_\nu(p, p_{n+1}, q, t)$
при $p = P(\alpha,t)$, $p_{n+1} = H(P(\alpha,t), Q(\alpha,t), t)$,
$q = Q(\alpha,t)$, а $\varepsilon$ — чисто мнимое.

d) Теорема 4.2 справедлива также и в случае, когда условие $\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|_{B^i} \leq 1$ (I) выполняется для всех $\varepsilon$ чисто мнимых и отрицательных. Теорема 4.2 будет справедлива также, если условие (I) выполняется лишь для $\varepsilon$ **чисто** мнимых, а $B^i = B^{i+} \oplus B^{i-}$ (см.стр.253).

Стр.296. а) Множество $\mathcal{E}$ не обязательно совпадает с интервалом
2 сн. $(E^0-\varepsilon, E^0+\varepsilon)$. Достаточно, чтобы оно было плотно на этом интервале.

в) Оператор $U_{0,t}$ есть оператор сдвига вдоль траекторий системы Гамильтона, отвечающей гамильтониану $H(p,x)$ оператора $\mathcal{L}$ (т.е. собственному значению оператора $\mathcal{L}(x,p,0)$)

с) Теорема 4.4 является нетривиальной и в случае, когда $n=1$, а $\mathcal{L}(x,p,h)$ – полином по $p$ с матричными коэффициентами, т.е. для системы линейных уравнений $m^{\text{ого}}$ порядка.

d) В случае, если $L(x,p,0) \equiv H(x,p)$, $R = i\frac{d}{dt} - \frac{i}{2}\sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial x_j} - i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}\Big|_{h=0}$

Стр.326. Кроме того $\|\tilde{Q}_m^{-1}\{y,y_1,0\}\|_{L_2} \leq const\{\|H_m y\|_{L_2} + \|H_m y_1\|_{L_2} + \|y_1\|_{L_2}\}$
3 сн. ($const$ не зависит от $h$).
Аналогичное утверждение следует из приводимых на стр.327–328 рассуждений для оператора Клейна-Гордона-Фока.

Стр.329. При $k=1$ это равенство доказано. Предположим, что оно
9 снизу. справедливо при $k \leq r$, тогда

$$\|\hat{p}^i h^{r+1}(RQ_m^{-1})(RQ_m^{-1})^r\varphi\|_{\mathcal{I}_2} \leq C\int_0^t \sum_{j=0}^{i} \|\hat{p}^j h^2 (RQ_m^{-1})^2\varphi\|_{\mathcal{I}_2} dt \leq$$

$$\leq C\int_0^t \sum_{j=0}^{i}\sum_{\alpha=0}^{j} \frac{C^r \alpha^r t^r}{r!} Max\|\hat{p}^\alpha\varphi\|_{\mathcal{I}_2} dt \leq \frac{C^{r+1} t^{r+1} i^{r+1}}{(r+1)!}\sum_{j=0}^{i} \underset{t}{Max}\|\hat{p}^j\varphi\|_{\mathcal{I}_2},$$

где $C$ – константа, зависящая только от $i$.

Стр.341. В лемме 5.8 множитель $(-1)^\nu$ принимает значения $\pm 1$,
1 сн. соответствующие двум линейно независимым решениям уравнения переноса.

Стр.349. а) Из условия I) следует, что A – замкнутый оператор
2 сн. (с всюду плотной областью определения), поэтому из равенства $\lim_{N\to\infty} A\{\int_0^N e^{iAx^2} g\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{iAx^2} A g\,dx$ по определению замкнутого оператора (ч.I, гл.2 §I) следует $A\int_0^\infty e^{iAx^2} g\,dx = \int_0^\infty e^{iAx^2} A g\,dx$

в) Формула (I.5) получается с помощью предельного перехода $\kappa\infty$ по верхнему пределу интегрирования.

Стр.385. До сих пор в доказательстве леммы 6.II мы следовали обще-
1 сн. принятому доказательству для функции со значением на прямой.

Стр.399. т.е. $\Omega_{\xi_i^0}$ – область значений функции $\frac{\partial S}{\partial x_i'}(x')$ при $x' \in \Omega$
5 сн.

Стр.431. Также как и в формулировке теорем об инвариантности,
1 сн. мы полагаем, что A-положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, а $\varphi(\alpha)$-функция со значениями в H. В доказательстве теоремы 2.4 можно рассматривать неограниченный оператор A в банаховом пространстве B, обладающий свойствами, изложенными в § I гл.6. Соответственно, $\varphi(\alpha)$ в этом случае является функцией со значениями в банаховом пространстве.

Стр.433. В работе В.А.Фока подробно прослежена аналогия между
6 сл. касательными преобразованиями классической механики и унитарными преобразованиями квантовых операторов, имеющих классический аналог.

Стр.461. Через $\tilde{u}_0^{\pm}(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)$ мы переобозначили функцию
1 сл.

$\tilde{u}_0^{\pm}(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h)$

# Замеченные опечатки

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 2 | Формула (0.4) | $e^{i(A+\varepsilon B)}=e^{iA}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k(iB)^k$ Пусть | Пусть |
| 61 | 4 сн. | $A$ | $\hat{L}$ |
| 62 | 2 сн. | $1/(d-\varepsilon)$ | $1/(d-\varepsilon)^2$ |
| 78 | 4 св. | $[\hat{L}^0+\varepsilon\tilde{v}(\tau,\varepsilon)]=$ | $[\hat{L}^0+\varepsilon\tilde{v}(\tau,\varepsilon)]$ |
| 87 | 8 св. | $\Vert\varphi_0\Vert=\Vert A^{-1}A_n\varphi_0\Vert$ | $\Vert\varphi_0\Vert=\Vert A_n^{-1}A_n\varphi_0\Vert$ |
| 90 | 10 св. | $\int_0^t\Vert\mathcal{F}(x,t\Vert^2dt$ | $\int_0^t\Vert\mathcal{F}'_t(x,t)\Vert^2dt$ |
| 91 | 6 св.<br>8 св. | $\Vert u\Vert$<br>$\Vert u_\varepsilon\Vert$ | $\Vert u\Vert_{L_2'}$<br>$\Vert u_\varepsilon\Vert_{L_2'}$ |
| 100 | 5 сн. | $E_\lambda^{(n)}g^{(d)}\to E_\lambda^{(n)}g^{(n)}$ | $E_\lambda^{(n)}g^{(\alpha)}\to E_\lambda g^{(\alpha)}$ |
| 108 | 2 св. | $C_\delta=\sqrt{\delta}R^*[1+\delta RR^*]$ | $C_\delta=\sqrt{\delta}R^*[1+\delta RR^*]^{-1}$ |
| 109 | 6 сн. | $=\overline{(T^*T+\delta)^{-1}T^*}$ | $=\overline{(T^*T+\delta)^{-1}T^*};\ R_\delta\tilde{u}=\tilde{z}_\delta$ |
| 118 | 6 сн. | $C(t,B)$ | $C(B)$ |
| 124 | 3 св. | $e^{\frac{1}{1-\delta\omega}t}$ | $e^{\frac{\omega}{1-\delta\omega}t}$ |
| 131 | формула (4.6) | $\max_{0\le t\le S}\Vert L_t^{-1}\varphi-L^{-1}\varphi\Vert_B\le\delta$ | $\max_{0\le t\le S}\Vert L_t^{(n)-1}\varphi-L_t^{-1}\varphi\Vert_B\le\delta$ |
| 143 | 5 св. | групп 6I,I) | групп по 6I,I) |
| 148 | 3 сн. | $\lim_{k\to\infty}a_kx_i=e$ | $\lim_{k\to\infty,\ i\to\infty}a_kx_i=e$ |
| 152 | 5 св. | $B\ni f_k>0$ | $B\ni f_k\Rightarrow 0$ |
| " | " | $T_{n_k}f_k>0$ | $T_{n_k}f_k\Rightarrow 0$ |
| 156 | 8 сн. | $T_{n_{k''}}\varphi$ | $T^*_{n_{\nu''}}\varphi$ |
| 174 | 3 св. | $(-1)^{\nu+1}\partial H(x^\nu,p^\nu,t)/\partial x_i^\nu$ | $(-1)^\nu\partial H(x^\nu,p^\nu,t)/\partial x_i$ |
| " | " | $(-1)^\nu\partial H(x^\nu,p^\nu,t)/\partial p_i^\nu$ | $(-1)^{\nu+1}\partial H(x^\nu,p^\nu,t)/\partial p_i^\nu$ |
| 174 | 6 св. | $\frac{dS_\nu}{dt}=(-1)^\nu(H(x^\nu,p^\nu,t)-\sum_i p_i^\nu H_{p_i^\nu}(x^\nu,p^\nu,t))$ | $\frac{dS_\nu}{dt}=(-1)^\nu(H(x^\nu,p^\nu,t)-\sum_i p_i^\nu H_{p_i^\nu}(x^\nu,p^\nu,t)=0$ |
| 175 | 7 сн. | $u_\nu(x,t)$ | $\frac{c(x_0^\nu,0)}{c(\tau,t)}u_\nu(x,t)$<br>$x_0^\nu=x_0^\nu(x,t)$ |
| 177 | 12 сн. | $\dot{x}_i=\partial H_t/\partial p_i\quad \dot{p}_i=-\partial H_t/\partial x_i$ | $\dot x_i=\partial H_t/\partial p_i\quad \dot p_i=-\partial H_t/\partial x_i$<br>$x(0)=x_0\quad p(0)=\nabla f(x_0)$ |
| 180 | 3 сн | $S^\nu(t,x_0)$ | $S(t,x_0)$ |
| 187 | 2 св. | $(\nabla+iAb(x,t)]^2$ | $(\nabla+iAb(x,t))^2$ |
| 187 | 10 сн. | $\sum_{i=1}^n(p_i+b_i)^2$ | $+\sum_{i=1}^n(p_i+b_i)^2-a_3$ |
| 189 | 4 св. | $D(A)$ | $D(A)$, имеющий обратный |
| 191 | 2 св. | $T$ | $A$ |
| 193 | 3 сн. | $\frac{e}{c}\Phi(x,t)\psi_0$ | $\frac{e}{c}\Phi(x,0)\psi_0$ |
| 205 | 14 св. | причем характеристическое уравнение не зависит от $g$, то | , то |
| 206 | 8 св. | $\frac{\partial}{\partial t}$ – характеристическим | $i\frac{\partial}{\partial t}$ – характеристическим |
| 207 | 7 сн | $iA$ – характеристическим | $A$ – характеристическим |
| 230<br>209 | (1.7а)<br>4 св | $\mathcal{L}_i(-ip_i^\nu$ | $\mathcal{L}_i(-ipA^{\nu^2}$ |

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 209 | 4 св. | $\hat{\mathcal{L}}_j=\hat{\mathcal{L}}_j(\frac{\partial}{\partial x},x,t,A)$ | $\hat{\mathcal{L}}_j\varphi=\hat{\mathcal{L}}_j(\frac{\partial}{\partial x},x,t,A)\varphi$ |
| 228 | II сн. | рис.5б | рис.7б. Пусть $x\in[x_2,x_3]$ |
| 229 | 5 сн | $1/h\int_{\ell[\alpha^0,\alpha_t^0]}pdq$ | $A\int_{\ell[\alpha^0,\alpha_t^0]}pdq$ |
| 231 | 4 св | $\Vert\psi_h-K_{r_h}^{0,\alpha^0}\cdot1\Vert=O(h)$ | $\Vert\psi_h-K^{0,\alpha^0}_{1/h,r_h}\cdot1\Vert=O(h)$ |
| 233 | 4 св | $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,r}(x)\varphi(\alpha)$ | $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,r}\varphi(\alpha)$ |
| 241 | 14 сн. | $e^{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]d\tau}$ | $e^{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]d\tau}e(\alpha)$ |
| " | 11 сн. | $f(\alpha,0)=\tau(\alpha)\in B$ | $f(\alpha,0)=e(\alpha)\in B$ |
| 242 | 3 св. | $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,r}=K^{\gamma,\alpha^0}_{-A,r}$ | $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,r}=(K^{\gamma,\alpha^0}_{-A,r})^*$ (компл.сопр) |
| 243 | 4 сн. | $\mathcal{F}(x,y,t)$ – ограниченная функция, | $\tilde{\mathcal{F}}(x,y,t)\in L_2$ |
| " | I сн. | $1/h\,S^\nu(\alpha^0,t)$ | $i\frac{\partial}{\partial y}S^\nu(\alpha^0,t)$ |
| 244 | 12 св. | $\mathcal{F}(x,y,t)$ – ограниченная функция | $\mathcal{F}(x,y,t)\in L_2$ |
| 247 | 8 св. | $\tilde p_1,\tilde p_2$ | $\tilde p_1,\tilde q_2$ (см.стр.429) |
| 255 | 7 св. | $\frac{i}{h}\int_{\alpha}^{\tilde\alpha^0}pdq$ | $A\int_{\alpha^0}^{\tilde\alpha^0}pdq+\gamma$ |
| 256 | I сн. | $\frac{1}{h}\int_{\ell[\alpha^0,\tilde\alpha^0]}pdq$ | $A\int_{\ell[\alpha^0,\tilde\alpha^0]}pdq$ |
| 257 | 4 сн | $\alpha>0$ | $\alpha>0\quad p^2+v(x)=E$ |
| | 2 сн | $\lambda_N$ | $\lambda_N^2$ |
| 264 | 6 сн | $\frac{c(Q^\nu(\alpha,t),t)}{c(q^0(\alpha),0)}$ | $\left(\frac{c(Q^\nu(\alpha,t),t)}{c(q^0(\alpha),0}\right)^{1/2}$ |
| | 5 сн | $1/2$<br>$i$<br>$dt$ | $1/4$<br>$(-1)^{\nu+1}$<br>$dt/2c\sqrt{(p+A)^2+\gamma^2}$ |
| 265 | I св. | $1/h\,S^\nu(\alpha^0,t)$ | $AS^\nu(\alpha^0,t)$ |
| 270 | 10 сн. | $\tilde x_1$ и $\tilde x_2$ | $\tilde x_2$ и $\tilde x_1$ |
| 272 | 5 сн. | $K^{\gamma^\alpha,\alpha^0}_{A,r_{1t},R_t}(x)$ | $K^{\gamma^\alpha,\alpha^0}_{A,r_{1t},R_t}$ |
| 273 | 4 св. | $K^{\gamma^\alpha_t,\alpha^0_t}_{A,r^\sigma_{2t},R_t}(x)$ | $K^{\gamma^\alpha,\alpha^0_t}_{A,r^\sigma_{2t},R_t}$ |
| " | 3 сн. | $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,r_1,R_t}(x)$ | $K^{0,\alpha^0}_{A,r_1,R_t}$ |
| " | I сн. | $K^{0,\alpha^0}_{A,r_2,R_t}(x)$ | $K^{0,\alpha^0}_{A,r_2,R_t}$ |
| 277 | 13 св. | канонических | лагранжевых |
| " | 6 сн. | унитарного оператора сдвига | самосопряжённого оператора |
| 278 | 6 св. | независимому | базисному |
| " | 10 св. | $\Delta\lambda=\{E^k-O(h),E^k+O(h)\}$ | $\Delta\lambda=\{\lambda^k-O(h),\lambda^k+O(h)\}$ |
| " | 14 св. | $E^k$ | $\lambda^k$ |
| " | 15 св. | $E^k\pm O(h^N)$ | $\lambda^k\pm O(h^N)$ |
| 285 | II св | $p_1$ | $p=p_1,\ ,p_n$ |
| 286 | формула (2.I) | $\dots(-ih\frac{\partial}{\partial t})^k\psi=0$ | $\dots(-ih\frac{\partial}{\partial t})^k\psi$ |
| " | 8 сн | некоторые | какие-нибудь |
| 293 | 4 сн | $1/h\int_{\ell[\alpha^0,\alpha^0_t]}(-H^\nu dt+\sum_{i=1}^n p_i dq_i)$ | $A\int_{\ell[\alpha^0,\alpha^0_t]}(-H^\nu dt+\sum_{i=1}^n p_i^\nu dq_i^\nu)$ |
| 295 | II сн | от $t$ | от $t$ и $p_{n+1}$ |

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 310 | 8 св. | $\tilde H_1 \int_0^t \mathcal F(\beta,t)dt$ | $\hat H_1 \int_0^t \mathcal F(\beta,t)dt$ |
| " | 9 св. | $\int_0^t \tilde H_1 dt \int_0^t \tilde H_1 dt'$ | $\int_0^t \hat H_1 dt \int_0^t \hat H_1 dt'$ |
| " | 10 св. | $\sum_{i=0}^k h^i \int_0^t \tilde H_1 dt_1 \int_0^{t_{i-1}} \tilde H_1 dt_{i-1}$ | $\sum_{i=0}^k (ih)^i \int_0^t \hat H_1 dt \int_0^{t_{i-1}} \hat H_1 dt_i$ |
| " | 4 св. | $\sum_{i=0}^k h^i$ | $\sum_{i=0}^k (ih)^i$ |
| " | 12 св. | $\sum_{i=0}^k h^i \int_0^t \tilde H_1 dt_1 \int_0^{t_1} \tilde H_1 dt_2$ | $\sum_{i=0}^k (ih)^i \int_0^t \hat H_1 dt_1 \int_0^{t_1} \hat H_1 dt_2$ |
| | | $\dots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \tilde H_1 f(\beta)$ | $\dots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \hat H_1 f(\beta)$ |
| " | 1 сн. | $\sum_{i=0}^k h^i \int_0^t \tilde H_1 dt_1$ | $\sum_{i=0}^k (ih)^i \int_0^t \hat H_1 dt_1 \dots$ |
| | | $\int_0^{t_{i-1}} dt_i \tilde H_1 f(\beta)$ | $\dots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \hat H_1 f(\beta)$ |
| " | 6 сн. | $ih \tilde H_1 u(t,\beta)$ | $ih \hat H_1 u(t,\beta)$ |
| 311 | 4 сн. | группы в банаховом пространстве В | сильно непрерывной группы в гильбертовом пространстве В, имеющий обратный и |
| 313 | 9 сн. | то $A^{-1}$ существует и ограничен. В этом | $A^{-1}$ существует и ограничен, то в этом |
| 318 | 10 сн. | такие, что | такие, что $f_0 = x_0$, |
| 323 | 13 сн. | $\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot X(x_0,t)]^2}{c^2-[\dot X(x_0,t)]^2}}$ | $\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot X(x_0,0)]^2}{c^2-[\dot X(x_0,t)]^2}}$ |
| 327 | 6 сн. | $\Vert Q_m^{-1} f\Vert_{L_2}$ | $\Vert RQ_m^{-1} f\Vert_{L_2}$ |
| " | 1 сн. | $\frac{\Vert R\Vert^k}{(mc^2h)^k}\frac{t_0^k}{k!}$ | $\frac{\Vert R\Vert^k}{(mc^2h)^k}\frac{t_0^k}{k!}\max_t\Vert f\Vert_{L_2}$ |
| 325 | | $\equiv hf + h\varphi(x)$ | $\equiv hf + h\varphi x_i$ |
| 352 | 13 сн. | $\int_0^{N2}$ | $\int_0^{N/2}$ |
| 358 | 3 св. | $T\bar T = Ag$ | $T\bar T g = Ag$ |
| 372 | 4 сн. | $e^{i(A+id)(\xi-a^2)}$ | $e^{i(A+id)(\xi-a)^2}$ |
| 377 | формула (2.20) | $(1+$ | $(1+\sigma_k)$ |
| 381 | 7 св. | $f''(0)=0$ | $f''(0)\neq 0$ |
| 388 | 7 сн. | Оценим | Очевидно $\Vert I_3(\kappa)\Vert \underset{\kappa\to\infty}{\to} 0$, где |
| 388 | 5 сн. | Имеем ....... Оценим | Оценим |
| 391 | 14 св. | $g_0(x)=g(x_0)\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\vert J\vert}}$ | $g_0(x_0)=g(x_0)\frac{(2\pi)^{n/2}e^{\frac{i\pi\delta}{4}}}{\sqrt{\vert J\vert}}$ |
| 393 | 8 сн. | $\mathcal F(\tau)$ -ограничена, | $\mathcal F(\tau)\in L_2$, |
| 411 | формула (3.21) | $\Phi^{p_1\ p_k} R_\varphi$ | $\Phi^{p_1\ p_k} e^{\frac{i}{h}S} R_\varphi$ |
| 412 | 5 сн. | $R_\varphi = \tilde R u = e^{\frac{i}{h}S}\{\frac{h}{\sqrt J}(-i\frac{du}{d\tau},$ | $R_\varphi = \tilde R u = \{\frac{h}{\sqrt J}(-i\frac{du}{d\tau},$ |
| 415 | 1 сн. а | $S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)=\Im(x_0(p,x,t),p_0(p,x,t),t)$ | $S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)=\Im(x_0(p,x,t),p_0(p,x,t),t)$, а |
| 416 | 15 св.) 4 сн.) | ортонормированная | нормированная |
| 417 | 2 св. | $\partial\lambda/\partial p_\nu \cdot a_{ij}$ | $\partial\lambda/\partial p_\nu\cdot\delta_{ij}$ |
| " | 4 св. | $\partial\lambda/\partial x_\nu \cdot a_{ij}$ | $\partial\lambda/\partial x_\nu\ \delta_{ij}$ |
| " | 4 св. | $a_{ij}=(X_j^+,X_i)$ | $\delta_{ij}=(X_j^+,X_i)$ |
| 419 | 1 св. | решение уравнения | уравнение |
| " | 3 св. | существует, | удовлетворяется, |
| 420 | 9 сн) 5 сн) 8 св. | $X_{01},\ ,X_{02}$ ортонормированные | $X_1,\ ,X_2$ нормированные |
| 421 | 2 св. | $X_{01},\dots,X_{02}$ | $X_1,\dots,X_2$ |
| 426 | 4 сн. | для любой финитной $\varphi_0(p,x,t)$ существует | существует |
| 431 | 3 сн. | $\varphi(\alpha)\exp\{iA[\dots]\}$ | $\exp\{iA[\ ]\}\varphi(\alpha)$ |
| 450 | 8 св. | $\Delta\lambda=\{E^j-o(h),E^j+o(h)\}$ | $\Delta\lambda=\{\lambda^j-o(h),\lambda^j+o(h)\}$ |
| 455 | 4 св | $\bigcup_{0\le t\le T} D_t\times\Omega_t$ | $\bigcup_{0\le t\le T} D_t$ |
| 466 | 11 св. | $\sqrt{1-\frac{[\dot X(\bar x_0,t_1+\frac{\Delta t}{4})]}{c^2}}$ | $\sqrt{1-\frac{[\dot X(\bar x_0,t_1+\frac{\Delta t}{4})]^2}{c^2}}$ |
| 507 | 4 сн. | $-\frac{[\lambda_n^2]^2}{72\pi(2n+1)}$ | $-\frac{d^2\mathcal F^2/\partial\lambda^2}{12\pi n}$ |
| 502 | 7 сн | $\mathcal F(x)=y(x)z(x)$ | $\mathcal F(x)=z(x)$ |
| 503 | 1; 4 сн | $v'(x)$ | $v'(x_1)$ |
| 504 | 1 св | $v'(x)$ | $v'(x_1)$ |
| 510 | 9 сн | $\varepsilon^6$ | $\varepsilon^5$ |
| 456 | 1 св | $n_p^* > n$ | $n_p^* > n^*$ |
| " | 5 св | $n_p^* > n$ | $n_p^* > n^*$ |
| 326 | 3 сн. | $\tilde Q_m\{y,y_1,0\}$ | $\tilde Q_m^{-1}\{y,y_1,0\}$ |
| 285 | 3,5 сн | $R_\lambda$ | $P_\lambda$ |
| 228 | 5 сн, 7 св | $K^{0,-\pi/2}_{p^2+q^2+a^2}$ | $K^{0,-\pi/2}_{1/h,\ p^2+q^2=a^2}$ |
| 36 | 3 св | $\varepsilon\to\infty$ | $\varepsilon\to 0$ |
| 49 | 3 св | $B_2$ | $B_2^*$ |
| 183 | 8 св | $-f_2$ | $f_2$ |
| 259 | 8 св | представлении, | представлении |
| 480 | 2 св | (1.39) | $\sum H_{p_ip_j} z_i z_j<0$ при $z\neq0$ |
| 481 | 6 св | $\rho>0$ | $\rho<0$ |

<u>Примечание к стр. 433/ строка 1 св./</u>

Поскольку $\alpha(\tilde y_{n_2})$ – неособая точка, то и некоторая её окрестность $\Omega_0 \subset \tilde\Omega_{\kappa_1}\cap\Omega_{\kappa_2}$ также неособая. Пусть $e_1(\alpha), e_2(\alpha)$ разбиение единицы по областям $\Omega_0$ и $\tilde\Omega_{\kappa_1}\cap\tilde\Omega_{\kappa_2}\setminus\Omega_0$: $\varphi(\alpha)\equiv e_1(\alpha)\varphi(\alpha)+e_2(\alpha)\varphi(\alpha)$. Искомые интегралы от второго члена не имеют стационарной точки и потому эквивалентны в $\delta$ нулю. Поэтому лемму 7.3 достаточно доказать для функции $e_1(\alpha)\varphi(\alpha)$, носитель которой принадлежит $\Omega_0\cap\tilde\Omega_{\kappa_1}\cap\tilde\Omega_{\kappa_2}$

<u>Примечание к стр. 481</u> Утверждение леммы, очевидно, справедливо при условии /1.39/ для матрицы - $B_\rho$

83 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА